استخدام أسلوب المحاكاة للمقارنة بين الطريقة اللوغاريتمية وطريقة جاوس نيوتن في تقدير معلمتى نموذج النمو الأسي

م.م. سيف الدين هاشم قمر

Abstract

The Exponential growth model is an important model especially for describe the growth of micro-organisms such as bacteria, as well as to describe the economic growth in stability, therefore in this paper, two methods Logarithmic and Gauss-Newton for estimating the two parameters of the Exponential growth model has been presented, and compared between these two methods. For verifying the object has been used the simulation technique where has been generated random samples with known parameters. It has been shown from the computational results which gives the best estimates is Gauss-Newton method

مقدمة Introduction:

يمكن تعريف منحنى النمو بأنه؛ أي تعبير عن حجم مجتمع بوصفه دالة لمتغير الزمن (X) بحيث يصف مسار نمـــوه[1]، ويمكن استخدام هذا التعبير لشرح نمو مفردة واحدة من المجتمع أو أكثر من ذلك.

وكلمة نمـــو تستخدم لوصـــف التغيرات غير العكسية مع الزمن (بصرف النظر عن وحدة القياس)، أي التغيرات في الحجم، أو الشكل، أو العدد؛ إذ أن معدل النمو للمشاهدات المتعاقبة يفترض أن يكون غير ثابت، وبالتالي فإن العلاقة بين الحجم والزمن تكون غير خطية؛ لهذا السبب فشلت النماذج الخطية في شرح ظاهرة النمو، ومن ثم فإن من الملائم استخـــدام النماذج غير الخطية لوصف سلوك النمو عند الزمن (X) التي طبقت في حقول عديدة منها علم الحيوان، وعلم النبات، وعلم الجراحة، وعلم البيئة؛ إذ يظهر النمو في الكائنات الحية كالنباتات والحيوانات، وكذلك في علم الكيمياء، والهندسة الكيمياوية فيظهر النمو نتيجة لردود الفعل الكيميائية، وفي العلوم الاقتصادية والسياسية كنمو المنظمات، ونمو تجهيز الغذاء والمواد الأخرى وكذلك نمو الشعوب.

لقد ظهرت في أواخر القرن الثامن عشر مفاهيم مختلفة للنمو وكانت في أوجها، حيث وظِّفت للتنبؤ بحجم المجتمعات، وكان لها نتائجها المختلفة بالاعتماد على طبيعة العلاقة بين حجم المجتمع والمصدر المستخدم، والتأثيرات الجانبية، وقد أُسندت تلك المفاهيم بجانب رياضي محدد واستُخدمت من قبل العديد من الباحثين لعمل التنبؤات المستقبلية من خلال الاستنباط اعتماداً على التطورات التي حدثت في الماضي، وقد اُفترض أن تلك المفاهيم لها

معنوية نظرية حقيقية، فإذا توافق اتجاه نمو المجتمع المدروس مع المبدأ الرياضي أعطى ذلك مبرراً قوياً لجعل التنبؤات المستقبلية تقوم على أساس ذلك المبدأ.

وتعتمد ظاهرة النمو على البيانات الطولية (Longitudinal data) المتمثلة بمشاهدات متكررة على طول الزمن الفعال التي يمكن أن تصاغ كعملية تصادفية، ويختلف هذا النوع من البيانات عن أغلب أنواع البيانات الأخرى من حيث أنها يجب أن تأخذ بالحسبان الاعتمادية للاستجابة الحالية على الزمن الماضي، وتأتي منحنيات النمو من ضمن الدوال الرياضية المهمة التي تتعامل مع هذا النوع من البيانات[٢].

إن أغلب دراسات الدوال غير الخطية المختلفة والمعروفة تتضمن عادةً وبشكلٍ ضروري تحليل منحنيات النمو، ومن خلال مسمى تلك المنحنيات فإنها عادةً تسير مع الدراسات التي تتعامل مع الزمن، وتمتلك منحنيات النمو عدداً من المميزات الخاصة التي تنفرد بها بمشاركة بسيطة مع بعض تحليلات السلاسل للمشاهدات التي تتغير عبر الزمن، ومن ضمن تلك المميزات ما يأتي[٣]:

- يكون تحليل النمو عموماً على شكل دالة لا خطية مع الزمن، وغالباً ما يصل إلى تقريب محدد.
- يزداد التغير العشوائي بشكلٍ عام مع الحجم لذلك فإن التباين يكون غير ثابت.
- الاستجابات المتعاقبة تقاس لنفس الظاهرة المحددة، وهذا يقود إلى أن تكون تلك الاستجابات غير مستقلة عن بعضها البعض.
- الاختلافات الشخصية لربما تعطي معدلات نمو، أو وجهات نظر مختلفة؛ إما لاختلافات أصلية، أو لاختلافات في التأثيرات البيئية المحيطة.
- من خلال تعريف ظاهرة النمو فإنه يكون غير مستقر من حين لآخر، وربما تحدث زيادات أو تطورات في النمو.

وينصب هدف هذا البحث في استخدام نوعين من طرق التقدير هما: الطريقة اللوغاريتمية وطريقة جاوس- نيوتن في تقدير معلمتي نموذج النمو الأسي، حيث فصلت المباحث التالية توضيح مفصل للنموذج الأسي وكذلك للطريقة اللوغاريتمية وطريقة جاوس- نيوتن في التقدير.

منحنى النمو الأسي Exponential Growth Curve

تحت افتراض أن معدل النمو يتناسب مع الحجم، ويأخذ الصيغة الآتية:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = k f(X) \qquad (1)$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على منحنى النمو الأسي الذي يأخذ الصيغة الآتية[٤]:

$$f(X) = e^{k(X-\gamma)} \qquad (2)$$

حيث أن:

k: تمثل معدل النمو النسبي (Relative Growth Rate) خلال الزمن (X).

γ: تمثل نقطة الانقلاب.

ويمكن إعادة كتابة الصيغة (2) كالآتي:

$$f(X) = \lambda \theta^{X} \qquad (3)$$

وأن $f(0) = \lambda$ الذي يمثل الحجم عند الزمن (0)، وعادةً يكون هذا المنحنى واقعياً في مراحل النمو الأولية إذ أنه لا شيء يمكنه الاستمرار في النمو أسياً إلى الأبد[٥].

ويتضمن هذا المنحنى نسبة ثابتة من التغير في النمو، فإذا كانت (θ) عدداً موجباً أكبر من الواحد ($\theta > 1$) فإن الاتجاه سيكون نحو الأعلى بزيادة متزايدة، ومقدار التغير في النمو سيخضع لنسبة ثابتة من الزيادة، أما إذا كانت (θ) عدد موجب أصغر من الواحد، وأكبر من الصفر ($0 < \theta < 1$) فإن الاتجاه سيكون نحو الأعلى بزيادة متناقصة، ومقدار التغير في النمو سيبدو بشكل نسبة ثابتة من النقصان[٦]، وفي الحالة التي يكون فيها (θ) عدد أصغر من سالب واحد فإن اتجاه المنحنى سيكون نحو الأسفل بزيادة متزايدة، ومقدار التغير في النمو سيبدو بشكل نسبة ثابتة من الزيادة، أما في الحالة التي يكون فيها (θ) عدد أكبر من سالب واحد، وأصغر من الصفر فإن اتجاه المنحنى سيكون نحو الأسفل بزيادة متناقصة، ومقدار التغير في النمو سيبدو بشكل نسبة ثابتة من النقصان، أما الحالتان الأخيرتان فهما ليستا من ضمن موضوع هذه الدراسة، من هنا فإن المنحنى الموضح في الصيغة (3) يعد غير ملائم لوصف نمو الظواهر التي يكون فيها معدل النمو النسبي غير ثابت[٧].

وبشكل عام فإن منحنى النمو يكون غير ملائم عندما نفترض مقداراً ثابتاً أو نسبة ثابتة للتغير في النمو، ولكنه يكون ملائماً عندما تكون الزيادة في السلسلة الزمنية تؤدي إلى زيادة معينة في مقدار التغير في النمو، ولكن بنسبة متناقصة[٨]، وقد اشتُهر هذا المنحنى باستخدامه

بشكل واسع لدى المتخصصين في علم الأحياء، وخاصةً في وصف نمو الكائنات الحية الصغيرة مثل البكتريا، وكذلك لوصف النمو الاقتصادي في حالة الاستقرار.

الطريقة اللوغاريتمية Logarithmic method

إن الكثير من الباحثين وفي أغلب الأحيان يقوم بعملية تحويل دوال الاستجابة غير الخطية إلى دوال خطية باستخدام بعض التحويلات الخاصة التي يمكن أن تتحول في أحيان كثيرة إلى دوال استجابة خطية بشكل جوهري، ويمكن توضيح ذلك من خلال نموذج النمو الأسي الموضح في الصيغة الآتية[٩]:

$$Y_i = \lambda \theta^{X_i} + \varepsilon_i$$

وأن $f(X_i, \lambda, \theta) = \lambda \theta^{X_i}$ تمثل دالة الاستجابة لهذا النموذج التي يمكن تحويلها إلى دالة استجابة خطية بعد أخذ اللوغاريتم للطرفين لتكون كالآتي:

$$\log_e f(X_i, \lambda, \theta) = \log_e \lambda + X_i \log_e \theta$$

والصيغة الأخيرة تمثل صيغة خطية، ويمكن التعبير عنها كالآتي:

$$g(X_i, \beta_0, \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

حيث $g(X_i, \beta_0, \beta_1) = \log_e f(X_i, \lambda, \theta)$ و $\beta_0 = \log_e \lambda$ و $\beta_1 = \log_e \theta$.

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى نحصل على القيم التقديرية لكل من (β_0, β_1).

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Log_e (g(X_i, \beta_0, \beta_1))}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \qquad (4)$$

وباستخدام قيمة (β_1) نحصل على (β_0)

$$\beta_0 = \bar{g} - \beta_1 \bar{X} \qquad (5)$$

حيث أن $\bar{X}$ و $\bar{g}$ تمثل الوسط الحسابي لكل من X_i و $g(X_i, \beta_0, \beta_1)$. ويمكن الحصول على القيم التقديرية لكل من θ و λ كالأتي:

$$\hat{\lambda} = e^{\beta_0} \qquad (6)$$

$$\hat{\theta} = e^{\beta_1} \qquad (7)$$

طريقة جاوس- نيوتن Gauss–Newton Method

إن النماذج غير الخطية، وكما هو معروف هي نماذج معقدة، ومتداخلة، ومن ثم فإن تحليلها، وطرق تقدير معلماتها هي الأخرى معقدة مما يتطلب الجهد الكبير للوقوف على الصعوبات، والمعوقات التي تعمل على تعقيد العمل ضمن هذه النماذج، ومحاولة تجاوزها، أو معالجتها باستخدام الطرق الإحصائية الملائمة، وبشكلٍ عام يمكن أن تأخذ نماذج الانحدار غير الخطية الصيغة الآتية:

$$\underline{Y} = f\left(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_k, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p\right) + \underline{\varepsilon} \qquad (8)$$

إذ أن:

$\underline{Y}$: يمثل متجه المتغير المعتمد من مرتبة (n×1).

$(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_k)$: تمثل متجهات المتغيرات المستقلة من مرتبة (n×k).

$(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$: تمثل معلمات النموذج.

$\underline{\varepsilon}$: يمثل متجه الأخطاء العشوائية من مرتبة (n×1).

وإذا وضعنا: $\underline{X} = (\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_k)'$ و $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$

فيمكن اختصار النموذج (8) كما في الصيغة الآتية:

$$\underline{Y} = f(\underline{X}; \underline{\theta}) + \underline{\varepsilon} \qquad (9)$$

حيث أن: $E(\underline{Y}) = f(\underline{X}; \underline{\theta})$

إذ افترضنا أن $[E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}]$، وتحت افتراض أن الأخطاء العشوائية غير مرتبطة، وأن $[Var(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 I_n]$ فيكون $[\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I_n)]$، من هنا فإن المشاهدة (i) للمتغير المعتمد يمكن أن تكتب كالآتي:

$$Y_i = f(\underline{X}_i; \underline{\theta}) + \varepsilon_i \qquad (10)$$

إذ أن: (i = 1, 2, ……., n)

ويمكن تسمية الدالة $f(\underline{X}_i; \underline{\theta})$ بدالة الاستجابة غير الخطية (Nonlinear response function) إذ تكون غير خطية في المعلمات.

إن الفرق المهم الذي يمكن الإشارة إليه بين النماذج الخطية، والنماذج غير الخطية هو أن عدد معلمات الانحدار في النماذج غير الخطية ليس بالضرورة أن يكون له علاقة مباشرة بعدد المتغيرات المستقلة في ذلك النموذج على العكس مما هو معروف عليه في حالة النماذج

الخطية[١٠]، حيث إذا كان لدينا (p-1) من المتغيرات المستقلة فإنه يوجد (p) من المعلمات الخاصة بذلك النموذج.

تحت افتراض وجود النموذج المعطى في (10) ولتكن $\left(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},...,\theta_p^{(0)}\right)$ تمثل القيم الأولية المفترضة للمعلمات $(\theta_1,\theta_2,...,\theta_p)$، إذ أن هذه القيم تفترض حسب تخمين عقلاني، أو تقديرات ابتدائية اعتماداً على بيانات، أو معلومات يمكن الاستفادة منها (الباحث يقترح القيم الأولية اعتماداً على خبرته ومعرفته بالظاهرة موضوع الدراسة، أو عن طريق المعلومات التي يحصل عليها من ملائمة المعادلات المتشابهة بطرق مختلفة، أو بالاعتماد على دراسات سابقة، أو بعض القيود أو غيرها)، ثم يتم العمل على تحسين القيم الأولية هذه من خلال التكرارات المتتابعة التي فُصّل الكلام عنها لاحقاً.

وبالاعتماد على مفكوك سلسلة تايلور لدالة الاستجابة $f(\underline{X}_i;\underline{\theta})$ عند النقطة $\left(\underline{\theta}^{(0)}\right)$ حيث أن:

$$\underline{\theta}^{(0)} = \left(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},...,\theta_p^{(0)}\right)'$$

وبتقريب هذه السلسلة، وذلك بحذف الحدود التي تحتوي على المشتقات الجزئية الأعلى من الدرجة الأولى نحصل على:

$$f(\underline{X}_i;\underline{\theta}) = f(\underline{X}_i;\underline{\theta}^{(0)}) + \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial f(\underline{X}_i;\underline{\theta})}{\partial\theta_j}\right]_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^{(0)}}(\theta_j - \underline{\theta}_j^{(0)}) \qquad (11)$$

فإذا افترض أن $f_i^{(0)} = f(\underline{X}_i;\underline{\theta}^{(0)})$ و $\beta_j^{(0)} = \theta_j - \theta_j^{(0)}$

وأن:

$$D_{ij}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(\underline{X}_i;\underline{\theta})}{\partial\theta_j}\right]_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^{(0)}} \qquad (12)$$

وبالتعويض عن الصيغة (11) باستخدام الرموز المفترضة أعلاه في النموذج المعطى في (10) فإن النموذج يصبح كالآتي:

$$Y_i = f_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{p} D_{ij}^{(0)}\beta_j^{(0)} + \varepsilon_i$$

ومنه يمكن الحصول على:

$$Y_i - f_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{p} D_{ij}^{(0)}\beta_j^{(0)} + \varepsilon_i \qquad (13)$$

الصيغة (13) ما هي إلا صيغة خطية، ومن ثم يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير المعلمات $\left(\beta_j^{(0)}\right)$ إذ أن (j = 1, 2, ... , p)

لتكن:

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(0)} & D_{12}^{(0)} & \dots & D_{1p}^{(0)} \\ D_{21}^{(0)} & D_{22}^{(0)} & \dots & D_{2p}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ D_{n1}^{(0)} & D_{n2}^{(0)} & \dots & D_{np}^{(0)} \end{bmatrix} = [D_{ij}^{(0)}] \qquad (14)$$

والمصفوفة $\left(D^{(0)}\right)$ من مرتبة (n×p).

وليكن

$$\underline{\hat{\beta}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1^{(0)} \\ \hat{\beta}_2^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}_p^{(0)} \end{bmatrix}$$

إذ أن $\left(\underline{\hat{\beta}}^{(0)}\right)$ يمثل متجه تقدير المربعات الصغرى الاعتيادية لمتجه المعلمات $\left(\underline{\beta}^{(0)}\right)$ ومن مرتبة (p×1).

وبافتراض:

$$\underline{Y}^* = \underline{Y} - \underline{f}^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1^{(0)} \\ Y_2 - f_2^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n - f_n^{(0)} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

منهُ:

$$\underline{Y}^* = D^{(0)}\underline{\beta}^{(0)} + \underline{\varepsilon} \qquad (16)$$

من الصيغة الأخيرة يمكن تقدير $\left[\underline{\beta}^{(0)} = \left(\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \dots, \beta_p^{(0)}\right)\right]$ وفق الصيغة الآتية:

$$\underline{\hat{\beta}}^{(0)} = \left(D^{(0)'} D^{(0)} \right)^{-1} D^{(0)'} \underline{Y}^{*} \qquad (17)$$

وبما أن $(\beta_j^{(0)})$ يمكن التعبير عنها بالشكل الآتي:

$$\beta_j^{(0)} = \theta_j - \theta_j^{(0)}$$

لذلك فإن القيمة التقديرية لها تكون:

$$\hat{\beta}_j^{(0)} = \hat{\theta}_j - \theta_j^{(0)} \qquad (18)$$

من المعادلة الأخيرة يمكن استخراج قيمة $(\hat{\theta}_j^{(1)})$ حيث أن (j = 1, 2, ... , p) التي تمثل القيمة التقديرية المعدلة للمعلمة (θ_j)عند التكرار الأول.

وللوصول إلى أفضل تقدير إلى $(\underline{\theta})$ تُجرى العمليات نفسها الموضحة سابقاً من الصيغة (11) إلى الصيغة (18) ولكن بوضع القيم التقديرية للمعلمات عند التكرار الأول $(\hat{\theta}_j^{(1)})$ بدلاً من القيم الأولية $(\theta_j^{(0)})$، وهذه العمليات ستقود إلى إيجاد مجموعة ثانية من التقديرات المعدلة $(\hat{\theta}_j^{(2)})$ وهكذا.

إن التقديرات المعدلة بشكل عام يمكن إعادة كتابتها كمتجه بالشكل الآتي:

$$\underline{\hat{\theta}}^{(K+1)} = \underline{\hat{\theta}}^{(k)} + \underline{\hat{\beta}}^{(k)} \qquad (19)$$

متجه المعلمات المقدرة الأخيرة يوضع بدلاً عن التقدير الأولي للمعلمات، ومن ثم تُجرى عليه العمليات السابقة نفسها مرة ثانية للحصول على التقدير الثاني للمعلمات، وهكذا حتى يتم الوصول إلى تقديرات متقاربة أي الحصول على التقديرين المتعاقبين (k) و (k+1) بحيث أن:

$$\left| \frac{\hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}}{\hat{\theta}^{(k)}} \right| < \delta \qquad (20)$$

وأن (δ) تمثل مقداراً صغيراً جداً.

عند ذاك يمكن القول أن القيم المقدرة بطريقة جاوس-نيوتن هي $\left(\underline{\hat{\theta}}^{(k+1)}\right)$ أي أن:

$$\underline{\hat{\theta}}_{GN} = \underline{\hat{\theta}}^{(K+1)}$$

الجانب التجريبي

لإتمام هذا البحث والحصول على النتائج المطلوبة فقد استخدمت لغة R التي تُعد من اللغات المتخصصة بمعالجة المخططات والمسائل الإحصائية المتقدمة وما يرتبط بها من مسائل أخرى[11]، حيث أعد برنامج خاص للقيام بذلك، فولّدت بيانات بحجم تكرار (500) تجربة تمثل الأخطاء العشوائية بالاعتماد على طريقة ميرسن- تويستر (Mersenne-Twister) لإجراء المحاكاة[12]، إذ ولّدت الأخطاء العشوائية على أساس أنها تتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي صفر وانحراف معياري يأخذ القيم (0.5, 2.5)، كما أن أحجام العينات المولدة هي (20) و (40) مشاهدة وبالاعتماد على منحنى النمو الأسي الموضح في المعادلة (3)[13]، فولّدت ثمان نماذج افتراضية كما موضح في الجدول (1) لتمثل هذا النموذج.

جدول (١)

القيم الافتراضية لمعلمتي نموذج النمو الأسي

Model		1	2	3	4	5	6	7	8
Parameter	λ	265	265	265	265	266	266	266	266
	θ	1.08	1.08	1.09	1.09	1.08	1.08	1.09	1.09
	σ	0.5	2.5	0.5	2.5	0.5	2.5	0.5	2.5

المصدر: من إعداد الباحث.

ومن خلال كل عينة مولدة في أثناء تنفيذ تجربة المحاكاة ولكل نموذج من نماذج النمو الافتراضية المستخدمة قُدرت معلمتي كل نموذج باستخدام الطريقة اللوغاريتمية وطريقة جاوس-نيوتن وقد تم حساب الانحراف الكلي لكل طريقة بالاعتماد على الصيغة الآتية:

$$TD = \left|\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\lambda}\right| + \left|\frac{\hat{\theta}-\theta}{\theta}\right| \qquad (21)$$

حيث أن λ و θ تمثل القيم الأولية، وأن $\hat{\lambda}$ و $\hat{\theta}$ تمثل القيم التقديرية حسب الطريقة المستخدمة، كما أن LOG تشير للطريقة اللوغاريتمية، و GN تشير لطريقة جاوس-نيوتن، وكما موضح في الجدول (2)، فإن العمود الأول يمثل حجم العينة المولدة، والعمود الثاني يمثل

رقم النموذج الافتراضي، فيما يمثل العمودين التاليين القيم التقديرية لمعلمتي النموذج الأسـي، أما العمود الآخر فيمثل الانحراف الكلي، والعمود الأخير يبين الطريقة الأفضل بالاعتماد على أصغر انحراف كلي.

جدول (٢)

تقدير معلمتي نموذج النمو الأسي باستخدام الطريقة اللوغاريتمية وطريقة جاوس- نيوتن

Method		LOG			GN			Best
n	Mode	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	TD	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	TD	
20	1	264.97672	1.080006	0.000093	265.00000	1.080000	0.000000	GN
	2	264.99710	1.080003	0.000014	265.00000	1.080009	0.000008	GN
	3	265.00648	1.089998	0.000026	265.00000	1.089998	0.000002	GN
	4	264.94965	1.090014	0.000203	265.00000	1.089998	0.000002	GN
	5	266.02276	1.079992	0.000093	266.00000	1.079999	0.000001	GN
	6	266.02465	1.079996	0.000096	266.00000	1.080002	0.000002	GN
	7	265.97733	1.090005	0.000090	266.00000	1.089999	0.000000	GN
	8	265.90690	1.090027	0.000375	266.00000	1.090001	0.000000	GN
40	1	265.00280	1.079999	0.000110	265.00000	1.080000	0.000000	GN
	2	264.96890	1.080002	0.000120	265.00000	1.080000	0.000000	GN
	3	265.00760	1.089999	0.000302	265.00000	1.090000	0.000000	GN
	4	265.00940	1.089999	0.000363	265.00000	1.090001	0.000000	GN
	5	266.02890	1.079996	0.000112	266.00000	1.080000	0.000000	GN
	6	266.00020	1.080001	0.000179	266.00000	1.079999	0.000000	GN
	7	265.99550	1.090001	0.000176	266.00000	1.090000	0.000000	GN
	8	265.96470	1.090006	0.000138	266.00000	1.089999	0.000000	GN

المصدر: من أعداد الباحث.

الاستنتاجات

تم في هذا البحث مقارنة الطريقة اللوغاريتمية وطريقة جاوس- نيوتن لتقدير معلمتي نموذج النمو الاسي، ومن خلال استعراض نتائج البحث في الجانب التجريبي نلاحظ أن طريقة جاوس-نيوتن أعطت اقل انحراف كلي TD لكلا العينيتين المولدتين ولكل النماذج المفترضة مقارنة بالطريقة اللوغاريتمية، وبالتالي نخلص إلى أن طريقة جاوس- نيوتن هي الأفضل.

هوامش البحث

(1) Kendall, M. G. and Buckland, W. R., **A dictionary of Statistical terms**, Third Edition Revised and Enlarged, New York: Published for the International Statistical Institute, Hafner Pub. Co., 1971, p.64.

(2) Lindsey, J. K., **Applying Generalized Linear Models**, New York: Springer, Inc., 1997, p. 69.

(3) Lindsey, J. K., **Nonlinear Models for Medical Statistics**, First published, Oxford; New York: published in United States by Oxford university press Inc., 2001, p. 37.

(4) **Ibid**, p. 38.

(5) Lindsey, J. K., **Applying Generalized Linear Models**, **Op. Cit**, p. 70.

(6) Grewal, P. S., **Methods of Statistical Analysis**, Second Edition Revised and Enlarged, New York: Sterling Publishers, 1990, p. 595.

(٧) عماد عدنان العتر، **استخدام المحاكاة في دراسة طرق توفيق منحنيات النمو لبيانات مكررة مع تطبيق عملي**، رسالة ماجستير في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، 1988، ص١٤.

(8) Croxton, F. E. and Cowden, D. J., Applied **General Statistical**, Third Edition, Englewood Cliffs; New Jersey: Prentice - Hall, Inc., 1967, p. 297.

(9) Frederick E. , Croxton F. E., Dudleg J., **Practical Business Statistics**, Third Edition, prentice – hall Inc, 1960, pp. 582-586.

(10) Kutner, M. N., Nachtsheim, C. J. and Neter, J., **Applied Linear Regression Models**, Fourth Edition, New York: McGraw-Hill Companies, 2004, p.511.

(11) Everitt, B. and Hothorn, T., **A Handbook of Statistical Analyses Using R**, CRC Press, 2006, p. 1.

Venables, W. N., Smith, D. M. and R. development Core Team, **An Introduction to R. Note on R: A program Environment for Date analysis**

and Graphics, R. development Core Team, 1999-2006, p. 1, available at: http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf. (Last access Jan 9,2009)

Ritz, C. and Streibig, J. C., **Nonlinear Regression With R**, Springer, 2008, pp.112-113.

(12) The R development Core Team, **R: A Language and Environment of Statistical Computing, Reference Index**, R Foundation for statistical computing, 1999-2009, pp. 1235-1236, available at: http://cran.r-project.org/doc/manual/fullrefman.pdf. (Last access Aug. 12,2009)

(١٣) اعتمدت القيم الأولية لمعلمتي هذا النموذج على بيانات نمو منتجات شركة بيتسبرغ لإنتاج الزجاج بالاعتماد على المصدر:

Frederick E. , Croxton F. E., Dudleg J., **Op. Cit.**, pp. 582-586.

المراجع

عماد عدنان العتر، **استخدام المحاكاة في دراسة طرق توفيق منحنيات النمو لبيانات مكررة مع تطبيق عملي**، رسالة ماجستير في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.، 1988.

Croxton, F. E. and Cowden, D. J., **Applied General Statistical**, Third Edition, Englewood Cliffs; New Jersey: Prentice - Hall, Inc., 1967.

Everitt, B. and Hothorn, T., **A Handbook of Statistical Analyses Using R**, CRC Press, 2006.

Frederick E. , Croxton F. E., Dudleg J., **Practical Business Statistics**, Third Edition, Prentice – Hall, Inc, 1960.

Grewal, P. S., **Methods of Statistical Analysis**, Second Edition Revised and Enlarged, New York: Sterling Publishers, 1990.

Judje, G. G., Griffiths, W. E., Hill, R. C. and Lee, T. C., **Theory and Practice of Econometrics**, New York: John Wiley & Sons, 1980.

Kutner, M. N., Nachtsheim, C. J. and Neter, J., **Applied Linear Regression Models**, Fourth Edition, New York: McGraw-Hill Companies, 2004.

Kendall, M. G. and Buckland, W. R., **A dictionary of Statistical terms**, Third Edition Revised and Enlarged, New York: Published for the International Statistical Institute, Hafner Pub. Co., 1971.

Lindsey, J. K., **Applying Generalized Linear Models**, New York: Springer, Inc., 1997.

Lindsey, J. K., **Nonlinear Models for Medical Statistics**, First published, Oxford; New York: published in United States by Oxford university press Inc., 2001.

Ritz, C. and Streibig, J. C., **Nonlinear Regression With R**, Springer, 2008.

The R development Core Team, **R: A Language and Environment of Statistical Computing, Reference Index**, R Foundation for statistical computing, 1999-2009, available at: http://cran.r-project.org/doc/manual/fullrefman.pdf. (Last access Aug. 12,2009)

Venables, W. N., Smith, D. M. and R. development Core Team, **An Introduction to R. Note on R: A program Environment for Date analysis and Graphics**, R. development Core Team, 1999-2006, available at: http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf. (Last access Jan 9,2009)