استخدام المحاكاة للمقارنة بين تقدير معلمات دالة توزيع ويبل حسب طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز

الدكتور
سيف الدين هاشم قمر
الجامعة العراقية/ كلية الإدارة والاقتصاد
الدكتور
حسام نجم عبود
كلية الرافدين

المستخلص :

يُعد توزيعَ ويبل Weibull مهماً جداً خصوصاً بالنسبة لتحليل المعولية reliability وتحليل قابليـــة الصـــيانة، لذلك قدّمت في هذا البحث، طريقتان: طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز لتقدير معلمتا دالة توزيع ويبـــل Weibull ذو المعلمتين، معلمة الشكل (β) ومعلمة المقياس (θ)، ومن ثم تمت مقارنة نتائج هاتين الطريقتين، ولتحقيق هـــذا الهـــدف أُستخدم أسلوب المحاكاةَ حيث ولّدت عينات عشوائية بافتراض قيم معلومة للمعلمات، وقد تبين من خلال النتائج الحسابية أن الطريقة الأفضل في التقدير هي طريقة بيز.

Abstract

The Weibull distribution is an important distribution especially for reliability and maintainability analysis, therefore in this paper, two methods the Maximum Likelihood and Bayes for estimating the two parameters of the Weibull distribution, namely, shape parameter (β) and scale parameter (θ) has been presented, and compared between these two methods. For verifying this object has been used the simulation method where has been generated random samples with known parameters. It has been shown from the computational results that the method which gives the best estimates is the Bayes method.

المقدمة والهدف:

تلعب العديد من النماذج الرياضية دوراً مهماً في حياتنا اليومية، بل وتدخل في الكثير من جوانبها، ويُعد توزيع ويبل من التوزيعات المهمة والخاصة بتقدير المعولـية (Reliability)، حيث يعتبر من نماذج الفشل (Failure Models) المستخدمة لتقدير معدلات الفشل واختبار الحـياة (life test).

لقد تم في هذه الدراسة عرض طريقتين لتقدير معلمتا دالة توزيع ويبل والتي تسمى معلمة الشكل (Shape) ومعلمة المقياس (Scale)، وقبل ذلك تم استعراض توزيع ويبل بشيء من التفصيل ليُتوقف على الكثير من الجوانب الرياضية التي يتميز بها هذا التوزيع، وبعد ذلك تقدير معلمتا هذا التوزيع باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز.

ولتحقيق هدف هذه الدراسة وهو مقارنة نتائج طريقتا التقدير، استُخدم أسلوب المحاكاة (Simulation) لتوليد العينات العشوائية اللازمة لذلك.

توزيع ويبل: **Weibull distribution**

يعتبر توزيع ويبل احد التوزيعات المستمرة (Continuous) وأحد النماذج الشائعة والمهمة المستخدمة لدراسة توزيع وقت الفشل، ولقد أُشتق توزيع ويبل من قبل تيث وفيشر عام (1928) كتوزيع تقريبي للقيم المتطرفة، وفي عام (1939) توصل العالم السويدي ويبل لهذا التوزيع في تحليل قوة المواد، وفي عام (1951) نشر هذا العالم مقالةً أعطى فيها بعض تطبيقات التوزيع، وقد وجدت أعمال العالم السويدي ويبل المكانة الكبيرة في وسط المهتمين في تحليل المعولية (Reliability) بعد الحرب العالمية الثانية وخصوصاً بعد حلول عصر الفضاء [9].

ويمكن اشتقاق دالة توزيع ويبل من مفهوم معدل المخاطرة (Hazard rate)، حيث أن دالة المخاطرة لتوزيع ويبل هي:

$$h(t)=\left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \qquad (1)$$

وأن (t) متغير عشوائي يمثل الزمن المعين لحدوث الفشل، ومن المعادلة(1) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل ذو المعلمتين [8].

$$f_T(t)=\left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}\exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right\},\quad t\geq 0 \qquad (2)$$

حيث أن:

β: معلمة الشكل (Shape)، وتحدد شكل التوزيع وتكون ذات قيمة موجبة.

θ: معلمة المقياس (Scale)، وهي أيضاً ذات قيمة موجبة.

أما توزيع ويبل ذو الثلاث معلمات فدالته الاحتمالية هي [8]:

$$f_T(t)=\left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t-\alpha}{\theta}\right)^{\beta-1}\exp\left\{-\left(\frac{t-\alpha}{\theta}\right)^{\beta}\right\},\quad t\geq \alpha \qquad (3)$$

حيث أن:

β: معلمة الشكل (Shape).

θ: معلمة المقياس(Scale).

α: معلمة الموقع (Location).

ومن المعادلة (1) يمكن ملاحظة الآتي[9]:

1. عندما $\beta>1$ فإن دالة المخاطرة تكون متزايدة مع t.
2. عندما $\beta<1$ فإن دالة المخاطرة تكون متناقصة مع t.
3. عندما $\beta=1$ فإن دالة المخاطرة تكون ثابتة.

أما الدالة التجميعية (CDF) لتوزيع ويبل فهي:

$$F_T(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right\}, \quad t \geq 0$$

وأن العزم الرائي لتوزيع ويبل ذي المعلمتين يمكن إيجاده كالآتي:

$$E(t^r) = M_r = \int_0^{\infty} t^r \left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right\} dt$$

وبإجراء التحويلات اللازمة يمكن الحصول على العزم الرائي الآتي:

$$M_r = \theta^r \, \Gamma\left(\frac{r}{\beta}+1\right)$$

وعندما r = 1,2 فيمكن الحصول على العزم الأول والثاني وهما:

$$M_1 = \theta \, \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

$$M_2 = \theta^2 \, \Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)$$

وهكذا فإن التباين والمتوسط لتوزيع ويبل ذو المعلمتين هما على التوالي:

$$M = \theta \, \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

$$Var = \theta^2 \left\{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2\right\}$$

أما الانحراف المعياري فهو:

$$\theta\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمات دالة توزيع ويبل:

Maximum likelihood Method for estimate the Parameters of the Weibull distribution

تعتبر طريقة الإمكان الأعظم من الطرق المهمة في التقدير لما تتميز به من خصائص وصفات كثيرة، فإذا افترضنا أن $t_1,t_2,....,t_n$ تمثل عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع له دالة الكثافة الاحتمالية $f(t;\theta)$ حيث أن θ تمثل معلمة النموذج المجهولة، أي أن:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\theta) \qquad (4)$$

ولتكن $\hat{\theta}$ مقدر الإمكان الأعظم للمعلمة θ التي تعظم دالة الإمكان L، أي أن تقدير الإمكان الأعظم للمعلمة θ هو الحل للمعادلة الآتية :

$$\frac{\partial \text{Log}_e L}{\partial \theta} = 0$$

وبتطبيق طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمات توزيع ويبل طبقاً إلى دالة توزيع ويبل الموضحة في المعادلة (2)، ستكون دالة الإمكان كالآتي:

$$L(t_1, t_2, ..., t_n; \beta, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta}{\theta}\right) \left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta}\right\} \qquad (5)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة(5) وبتفاضل الدالة بالنسبة للمعلمتين وبالمساواة بالصفر نحصل على المعادلتين التقديريتين الآتيتين:

$$\frac{\partial \text{Log}_e L}{\partial \beta} = \frac{n}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^{n} \text{Log}_e t_i - \frac{1}{\hat{\theta}} \sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}} \text{ Log}_e t_i = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \text{Log}_e L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{1}{\hat{\theta}^2} \sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}} = 0 \qquad (7)$$

وبحذف θ بين المعادلتين (6) و (7) نحصل على [2]:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}} \text{ Log}_e t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}}} - \frac{1}{\hat{\beta}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \text{Log}_e t_i = 0 \qquad (8)$$

تُحل المعادلة (8) أعلاه بإحدى الطرق العددية المستخدمة لحل المعادلات الرياضية الغير خطية (مثل طريقة نيوتن–رافسون)[11]، وباستخدام المعادلة(7) وبتوظيف القيمة التقديرية للمعلمة β يمكن إيجاد القيمة التقديرية للمعلمة θ وهي:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}}}{n} \qquad (9)$$

طريقة بيز في تقدير معلمات دالة توزيع ويبل:

Bayesian Method for estimate the Parameters of the Weibull Distribution

بالاعتماد على قاعدة جفري Jeffery، وبافتراض أن التوزيع الأولي للمعلمتين (β, θ) هو $g(\theta)$ و $h(\beta)$ حيث أن [9]:

$$g(\theta) \propto \left(\frac{1}{\beta}\right)^c \ , c > 0 \ , 0 < \theta < \infty$$

$$h(\beta) \propto \left(\frac{1}{a}\right), \ 0 < \beta < a$$

وباستخدام التوزيعات الأولية أعلاه والتوزيع المشاهد الذي هو توزيع ويبل يمكن الحصول على التوزيع اللاحق لكل من (β, θ):

$$f(\beta,\theta/t)=\frac{K\beta^{n}}{\theta^{n+c}}\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{\beta-1}\exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}}{\theta}\right) \qquad (10)$$

حيث أن:

$$K^{-1}=\int_0^a\int_0^\infty f(\theta,\beta/t)\,d\theta\,d\beta$$

$$\Rightarrow K^{-1}=\Gamma(n+c-1)\int_0^a\frac{\beta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{\beta-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\right)^{n+c-1}}d\beta$$

وبأخذ التكامل للمعادلة (10) بالنسبة إلى θ نحصل على التوزيع اللاحق للمعلمة β

$$f(\beta/t)=\frac{\dfrac{\beta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{\beta-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\right)^{n+c-1}}}{\displaystyle\int_0^a\frac{\beta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{\beta-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\right)^{n+c-1}}d\beta} \qquad (11)$$

وبنفس الطريقة نحصل على التوزيع اللاحق للمعلمة θ:

$$f(\theta/t)=\frac{\dfrac{1}{\theta^{n+c}}\displaystyle\int_0^a\beta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{\beta-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}/\theta\right)d\beta}{\Gamma(n+c-1)\displaystyle\int_0^a\frac{\beta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{\beta-1}}{\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\right)^{n+c-1}}d\beta} \qquad (12)$$

ومن المعادلتين (11) و (12) وعلى فرض أن دالة المخاطرة تأخذ شكل مربع الخطأ نحصل على تقدير بيز للمعلمتين β و θ كالآتي:

$$\hat{\beta}=\frac{\displaystyle\int_0^a\beta^{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{\beta-1}\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\right)^{n+c-1}d\beta}{\displaystyle\int_0^a\beta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{\beta-1}\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{\beta}\right)^{n+c-1}d\beta} \qquad (13)$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n+c-2} \frac{\int_0^a \beta^n \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{\beta-1} \Big/ \left(\sum_{i=1}^n t_i^{\beta}\right)^{n+c-2} d\beta}{\int_0^a \beta^n \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{\beta-1} \Big/ \left(\sum_{i=1}^n t_i^{\beta}\right)^{n+c-1} d\beta} \qquad (14)$$

الجانب التطبيقي:

لقد تم استخدام تقنية المحاكاة (Simulation) بحجم توليد 1000 لتحقيق هدف الدراسة المتمثل بالمقارنة بين الطريقتين المشمولتين بالدراسة وهما طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز لتقدير معلمتا دالة توزيع ويبل، ولتحقيق هذا الغرض ولُدت عينات عشوائية بقيم معلومة للمعلمات المراد تقديرها باستخدام أسلوب مونتي كارلو Monte carlo procedure، وحجم هذه العينات يتراوح بين 20 إلـــى 100 مشاهدة، وللمقارنة فقد أُستخدم معيار الانحراف الكلي TD (Total Deviation) لكل طريقة حيث أن:

$$TD = \left|\frac{\hat{\beta}-\beta}{\beta}\right| + \left|\frac{\hat{\theta}-\theta}{\theta}\right| \qquad (15)$$

وأن β و θ هما المعلمتان (المفترضة) وأن $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$ هما المعلمتان المراد إيجاد تقديرهما وبتطبيق الصيغ (13) و(14) تم الحصول على تقديرات بيز لمعلمتا دالة توزيع ويبل، والجدول (1) يبين النتائج الكاملة للعمليات المطلوبة، وكما مبين في الجدول فإن العمود الأول يبين تسلسل العينات المولدة حيث تم توليد خمسة عينات للدراسة، أما العموديين الثاني والثالث فيبينان القيم الافتراضية للمعلمتين β و θ والعمود الرابع يبين حجم العينات المولدة والتي هي 20 و 40 و 60 و 80 و 100، والأعمدة الأخرى تبين لنا القيم المقدرة للمعلمتين حسب طريقة التقدير مع الانحراف الكلي لكل طريقة، ويحدد العمود الأخير الطريقة الأفضل في التقدير.

جدول (1) يمثل مقارنة بين طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز

N	β	θ	Size	M.L.E.			Bayes			Best
				β	θ	TD	β	θ	TD	
1	1	10	20	1.10593	10.39234	0.46232	0.99385	8.77682	0.19935	Bayes
			40	0.99845	9.93733	0.04368	0.99669	9.40706	0.04449	MLE
			60	1.01141	9.64181	0.28718	0.99777	9.23120	0.23466	Bayes
			80	1.02481	9.93526	0.19360	0.99836	9.52402	0.18890	Bayes
			100	0.96648	9.29988	0.05598	0.99854	9.23913	0.04406	Bayes
2	2.3	140	20	2.53844	138.366259	0.13759	2.29897	121.17676	0.33673	MLE
			40	2.35800	136.36339	0.10608	2.29945	125.25743	0.10452	Bayes
			60	2.36452	136.71494	0.16539	2.29963	126.95649	0.10754	Bayes
			80	2.39633	140.58340	0.03604	2.29974	139.32045	0.02872	Bayes
			100	2.40779	142.28898	0.04916	2.29980	139.56067	0.03447	Bayes
3	3.5	350	20	3.78087	348.80646	0.23895	3.49937	297.30196	0.05498	Bayes
			40	3.65267	343.81378	0.04386	3.49967	312.21606	0.02219	Bayes
			60	3.72198	349.78664	0.04713	3.49979	336.36451	0.04581	Bayes
			80	3.68808	344.55588	0.05612	3.49984	341.75097	0.09796	MLE
			100	3.63486	347.60532	0.09451	3.49987	339.06151	0.00317	Bayes
4	4.5	1270	20	4.65066	1223.51732	0.03883	4.49974	985.44180	0.27213	MLE
			40	4.78095	1249.63201	0.12781	4.49988	1154.93662	0.12865	MLE
			60	4.81937	1270.85928	0.17988	4.49993	1200.56570	0.09173	Bayes
			80	4.44108	1245.50900	0.19172	4.49994	1277.76003	0.08478	Bayes
			100	4.35408	1238.33412	0.05462	4.49995	1215.40696	0.01061	Bayes
5	2.9	850	20	3.06586	820.54718	0.21334	2.89977	709.49113	0.11137	Bayes
			40	2.90893	841.23534	0.22489	2.89989	810.90509	0.11723	Bayes
			60	2.99384	837.76872	0.23262	2.89992	793.06814	0.04856	Bayes
			80	2.85510	841.86118	0.11522	2.89994	787.49756	0.01219	Bayes
			100	2.94067	831.68848	0.03001	2.89996	828.25023	0.01309	Bayes

المصدر: من إعداد الباحثين

ويتضح من الجدول (1) أعلاه أن تقديرات بيز كانت هي الأفضل حيث أعطت أقــل انحراف كلي TD مقارنة بطريقة الإمكان الأعظم، ويظهر ذلك جلياً في نتائج العمود الأخير من الجدول (1) أعلاه، حيث ظهر أن طريقة بيز هي الأفضل في 20 تقدير من مجموع 25 تقدير لمعلمتا دالة توزيع ويبل.

الاستنتاجات:

من خلال هذه الدراسة والتي تم فيها عرض طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز لتقدير معلمتا دالة توزيع ويبل ومن خلال النتائج الحسابية التي تم التوصل إليها أُستخرجت النتائج الآتية:

1) ظهر أن تقديرات بيز لمعلمتا دالة توزيع ويبل هي الأفضل مقارنةً بتقديرات الإمكان الأعظم لمعلمتا نفس الدالة.

2) باستخدام طريقة نيوتن رافسون فإن تقديرا معلمتا دالة توزيع ويبل لكلتا الطريقتين المخصوصتين بالدراسة بقت مستقرة عند تغيير القيم الأولية لتلك المعلمتان.

3) في حالة تغيير حجم العينة فإن النتائج لم تتأثر بل بقت على ثباتها، من حيث التقارب في نتائج الانحراف الكلي TD.

الدراسات المستقبلية:

1) استخدام دوال توزيع أولية مختلفة، وعمل دراسة مقارنة للوصول إلى التوزيع الأولي الذي يعطي أفضل تقدير لمعلمتا دالة توزيع ويبل.

2) استخدام طرق أخرى لتقدير معلمتا توزيع ويبل ومقارنتها مع الطريقتين المدروستين في هذا البحث بغيت التوصل إلى الطريقة الأفضل.

3) التوسع في دراسة دالة توزيع ويبل ذو الثلاث معلمات وتقدير معلماتها باستخدام عدة طرق.

References

[1] Box, G. E. P. and Tiao, G. C., " Bayesian Inference in Statistical Analysis" , Addison – Wesley Publishing Company, Inc., 1973.

[2] Cohen, A. C., " Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and censored samples", **Technometrics** 5, 1965, pp. 579-588.

[3] Grewal, P. S., "Methods of Statistical Analysis", Second Revised and Enlarged Edition, 1990.

[4] Jefferys, H., "Theory of probability", Oxford Clarendon Press, 1961.

[5] Larson, H. J., "Introduction to Probability Theory and Statistical Inference", Third Edition, John Wiley & Sons, New York, 1982.

[6] Mann N. R., Schafer R. E., and Singpurwalla N. D., "Methods for statistical analysis of reliability and life data", John Wiley and Sons, New York, 1974.

[7] Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. S., "Introduction to the Theory of Statistics", Third Edition, MC Graw – Hill Inc, 1985.

[8] Rockette, H., Antle, C., Klimko, L. A., "Maximum likelihood estimation with the Weibull model", **Jour. Amer. Stat. Assoc.**, 1974, vol. 69, pp. 246-249.

[9] Sinha, S. K., "Reliability and life testing", Wiley Eastern Ltd. / Halstead Press, 1986.

[10] Soland, R. M., "Bayesian analysis of the Weibull process with unknown scale parameter and its applications to acceptance sampling", **IEEE Trans. Reliability**, 1986, vol. R-17, Jun, pp. 84-89.

[11] Stone G. C. and G. Van Heeswijk, "Parameters estimation for the Weibull distribution", **IEEE Trans. On Elect. Insul.**, 1977, vol. EI-12, No. 4, August.

[12] Wayne C. Ellis, V. M. Rao Tummala, "Bayesian approach to maximum likelihood estimation of parameter of Weibull distribution", **Proc. American Statistical Association, Business and Economics Section**, 1983 Apr 15-18, Toronto, Canada. Available from American Statistical Association; 806 15th street, NW; Washington DC 20005 USA.

[13] Zellner, A., "An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics", John Wiley and Sons, Inc, 1971.