تقدير الانحدار الحصين باستخدام المقدرات الضبابية الحصينة اعتماداً على الدوال الرتبية

أ.د. آيدن حسن حسين
جامعة بغداد/ كلية العلوم للبنات
راويه عماد كريم
جامعة الموصل/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات

المستخلص:

تتلخص فكرة البحث في إيجاد مقدرات حصينة لمعلمات نموذج الانحدار الخطي ففي حالة عدم توفر شرط وفرضية التوزيع الطبيعي للبيانات وفرضية عدم تجانس التباين في البيانات عند تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي. لذلك يمكن استخدام الطرائق الحصينة وخصوصا عند توفر قيم شاذة في البيانات بدمج أسلوب M الحصين والأعداد الضبابية بحيث تحول المقدرات إلى مقدرات ضبابية باستخدام دالة الانتماء المثلثية من اجل ذلك سنقوم بالتركيز على طريقة M الحصينة التي تحتوي على أربع دوال وبعدها يتم استخدام هذه الأعداد الضبابية في الدالة الرتبية واستخدام الخوارزميات للدالة الرتبية للحصول على أفضل مقدر يمثل نموذج الانحدار وتم المقارنة بين النتائج واعتماد المقدر الأفضل عن طريق استخدم معيار متوسط مربعات الخطأ فالمقدرات التي تعطي اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ تكون أفضل المقدرات التي تمثل نموذج الانحدار الخطي البسيط.

الكلمات الدلالية للبحث: الأعداد الضبابية , الدالة الرتبية ,الدوال الحصينة.

Estimate the robust regression Using the fuzzy estimation robust based on the ranking functions

Abstract

The idea of the Research Boston finding the combination of stones robust estimate for parameter of regression linear model integration method M estimator with fuzzy estimates represents the regression model and The algorithms of the function of education to obtain the best estimator represents the regression model and by using mean squares error and utilizing spared criterion for favorite function to fuzzy number after testing it by using triangular membership function After that we transform the fuzzy number to ranking function to know which of these ranking function are efficient to find the parameters estimators for linear simple regression model by utilizing the mean squares error .

Key words :fuzzy number , ranking function ,robust function.

المقدمة

1. المقدمة

تعد مسألة تقدير المعلمات من المسائل المهمة في تحليل الانحدار لذا فان اختيار الأسلوب الملائم للتقدير هو من الأمور التي تساعد في الحصول على تصورات عن المجتمع الذي أخذت منه العينة المدروسة، لان عملية التقدير هي بمثابة أعطاء مؤشرات عن نوع وحجم العلاقة بين متغير الاستجابة والمتغيرات التوضيحية . وهناك عدة أساليب للتقدير ولكن أكثر هذه الأساليب استخداما وانتشارا هي طريقة المربعات الصغرى.

لقد هيمنت طريقة المربعات الصغرى على أساليب تقدير معلمات الانحدار الخطي ولفترة طويلة من الزمن لما لهذه الطريقة من خواص ومزايا جيدة تميزت بها مقدراتها . ولكن وجد الباحثون أن هذه الطريقة تكون غير كفوءة في حالة عدم تحقق واحد أو أكثر من الافتراضات أو شروط التي تعتمد عليها هذه الطريقة ،مثل فرضية التوزيع الطبيعي لحد الخطأ وذلك قد ينتج أحياناً بسبب وجود قيم شاذة (outliers) في البيانات والتي تعرف بكونها "مشاهدات تنحرف بشكل ملحوظ عن بقية المشاهدات " وغالباً ما تنشا من التوزيعات ثقيلة الأطراف (Distributions tions Heavy-tailed) توزيعات طويلة الأطراف (Long-taile Distributions) أو من توزيعات مختلط (Mixture Distributions) وقد يعزى سبب شذوذها إلى وجود أخطاء في القراءات أو الحسابات أو التسجيل أو أنها ربما تكون قيم حقيقية, مما يؤثر على مقدرات المربعات الصغرى حيث أنها قد تسحب إليها خط التوفيق للمربعات الصغرى .[20]

ومن هنا بدأ اهتمام الباحثين لإيجاد طرائق ذات كفاءة أعلى ولا تتأثر كثيراً بالانحراف عن الافتراضات كبديل عن طريقة المربعات الصغرى , وأطلق على هده الطرق بالطرائق الحصينة (Robust methods) والتي تتصف مقدراتها بخصائص جيدة سواء كان توزيع الأخطاء توزيعاً طبيعياً أو غير طبيعي لذلك ظهرت عدة طرائق حصينة منها:

١-مقدرات M

2-مقدرات R

3-مقدرات L

4-مقدرات M المكيفة

أن المشكلة الأساسية والجوهرية في الإحصاء هي إيجاد مقدرات لمعلمات المجتمع على أساس معلومات متضمنة داخل العينة العشوائية لذا فقد حاول الباحثون إيجاد مقدرات كفوءة لتلك المعلمات في حالة وجود

قيم شـــاذة وقد تم التوصـــل إلى مجموعة من التقديرات التي أطلق عليها طرائق التقديرات الحصـــينة (Robust Estimation Methods) ويهدف البحث إلى اختيار عدد من الطرائق الحصـــينة لتقدير معلمات نموذج الانحدار وذلك من خلال اختبار ومقارنة مجموعة من مقدرات الكفاءة الحصـــينة لاختيار الطريقة الأكثر كفاءة وبعد إيجاد المقدرات الحصينة لمعالم نموذج الانحدار الخطي البسيط وتحويلها إلى إعـداد ضـــبـابيـة (Fuzzy numbers) وبـالاعتمـاد على درجـة العضـــويـة المثلثيـة (Triangular membership function) ومن ثم تطبيق الـدالـة الرتبيـة (Ranking function) للحصـول على مقدرات جيده لهذه الطرائق الحصينة بالإضافة إلي إيجاد طريقة مقترحة للدالة الرتبية ومن ثم اســـتخدام متوســـط مربعات الخطأ (Mean squares error) للمقارنة بين الدوال الرتبية للمعلمات الحصينة بالإضافة إلى الطريقة المقترحة للحصول على مقدر أكثر كفاءة من المقدرات الأخرى وسوف يتم التطبيق على بيانات تم استخدمها من قبل العديد من الباحثين.

وقد تداول في هذا البحث التطبيق العملي لطريقة M الحصينة والتي تحتوي على أربع دوال نقوم باستخراج المقدرات الحصينة لانموذج الانحدار الخطي البسيط وبعدها تستخدم المقدرات الحصينة بتحويلها إلى إعداد ضبابية بعد اختبارها عن طريق دالة الانتماء المثلثية وتحويلها إلى دالة رتبيه لاستخراج أفضل المقدرات التي تمثل نموذج الانحدار البسيط.

تضمن البحث جانبين, الجانب الأول تمثل بتعريف القيم الشاذة وأثرها وأساليب معالجتها، وعرض أسلوب Mالحصين والدوال المستخدمة وطريقة كشف الشواذ باستخدام الطرق الحصينة وكيفية معالجتها وإيجاد مقدرات تمثل نموذج الانحدار بالطرق الحصينة تكون أكثر كفاءة ومن تم تحويل هذه التقديرات إلى أعداد ضبابية , فقد تم دراسة الإعداد الضبابية ومن ثم تحويل هذه الأعداد إلى دالة رتيبة للحصول على أفضل مقدر لانحدار الخطي البسيط .

أما الجانب الثاني فتمثل بتطبيق ما ورد في الجانب الأول من طرق كشف الشواذ وطريقة المعالجة واستخرج الدالة الرتبية للحصول على أفضل المقدرات التي تمثل نموذج الانحدار الخطي وختم البحث بالاستنتاجات التي توصل إليها والتوصيات.

٢- القيم الشاذة وطرق تشخيصها [5]

القيم الشاذة Outliers Values

إن أي باحث في مجال الإحصاء التطبيقي عندما يحلل مجموعة من البيانات الحقيقية فأنه من المحتمل أن يكشف وجود القيم الشاذة والتي تعرف بأنها المشاهدات التي تنحرف كثيراً عن المشاهدات الأخرى وبالتالي تكون غير منسجمة مع بقية مشاهدات البيانات لظاهرة معينة وقد تكون هذه القيم كبيرة أو صغيرة أي أن الظاهرة تكون ملوثة (Contaminated)بوجود هذه المشاهدات وتسمى هذه المشاهدات بالملوثات(Contaminates).

ان الكشف عن الشواذ في البيانات ومعالجتها أخذت مساحة واسعة من البحث الإحصائي بسبب كون الاستدلال الإحصائي المبني أساساً على التوزيع الطبيعي يكون حساساً جداً اتجاه الشواذ ,أن وجود الشواذ في البيانات يؤدي إلى إرباك كبير في تحليل البيانات في حالة استخدام الطرائق الكلاسيكية في التقدير ومنها طريقة المربعات الصغرى .

ولقد أوضح(Huber ,1973)تأثير القيم الشاذة على مقدرات المربعات الصغرى من خلال مقولتهُ المشهورة أن وجود قيمة شاذة واحدة يهدم المزايا الجيدة لمقدرات المربعات الصغرى كما أنها تسحب إليها خط التوفيق للمربعات الصغرى, وكما أوضح (Rousseeuw,1987) بالأمثلة تأثير الشواذ على مقدرات المربعات الصغرى, وأوضح بالرسم كيف أن المشاهدات الشاذة الواحدة تغير من اتجاه خط المربعات الصغرى وعرف (Chatterjee and Hadi,1988) شواذ الانحدار بأنها تلك المشاهدات التي لها قيمة معيارية (Studentzed Values) كبيرة مقارنة ببقية المشاهدات , بعبارة أخرى أن المشاهدات تعد شواذا اعتمادا على عدم نجاح ملائمة الانحدار OLS في تكيف تلك المشاهدات ,إما(Draper and Smith) فيعرفان

المشاهدة الشاذة في الانحدار الخطي بأنها تلك المشاهدات التي تكون القيمة المطلقة لبواقيها(e_i) اكبر كثيرا عن بقية القيم المطلقة لبواقي بقية المشاهدات ,وربما تبتعد تلك القيمة عن متوسط البواقي (e) بمقدار ($3\sigma_e$)أو($4\sigma_e$)أوأكثر,أن تلك القيمةالشاذة متميزة (Peculiarity) وتشير إلى إن نقطة من البيانات ليست مثل هيأة بقية البيانات .

ولمعالجة مشكلة وجود المشاهدات الشاذة هنالك أسلوبان يسيران باتجاه معاكس الأسلوب الأول هو حذف المشاهدات الشاذة أي يتم إبعادها عن المشاهدات ومن ثم استخدام التقديرات التقليدية أما الأسلوب الثاني يتم الكشف عن الشواذ باستخدام طرق الكشف عنها ومن ثم استخدام الطرق الحصينة للتقدير التي تستخدم البيانات كاملة ولكنها تحد من تأثيرها من خلال إعطائها أوزان اقل من المشاهدات غير الشاذة.[4]

٣- بعض طرائق الكشف عن المشاهدات الشاذة.

هناك أساليب عديدة للكشف عن هذه القيم نذكر منها:-

طريقة الرسم الصندوقي والقطع المخططة . Box and Whisker-Plot[٢٠]

وهي طريقة لا معلمية اقترحت من قبل العالم Tukey في عام (١٩٧٧) لاكتشاف القيم الشاذة حيث إن طريقة الرسم الصندوقي (Boxplot)تعتمد على استخدام الربيعيات للبيانات المعطاة ويتم استخراجه حسب الخطوات التالية:

١-تحسب الفجوة بين الربعين الأعلى والأدنى كما يلي :

$$IQR=Q_3-Q_1 \qquad \ldots(1)$$

٢-نحسب السياج الداخلي (Inner Fence) ويحسب كالأتي:

$IF_1=Q_1-1.5.IQR$ ...(2)

$IF_2=Q_3+1.5.IQR$

أي أن أي قيمة تقع بين الحد الأعلى والحد الأدنى في السياج الداخلي تكون قيم شاذة معتدلة.

٣-نحسب السياج الخارجي (Outer Fence).

$OF_1=Q1-3.IQR$ ...(3)

$OF_1=Q_3+3.IQR$

أي أن أي قيمة تقع بين الحد الأعلى والأدنى تكون قيم متطرفة (شاذة).

الطريقة الحصينة لكشف الشواذ في الانحدار الخطي البسيط.[2],[18]

مقياس Rousseeuw and Croux

تم اقتراح هذا المقياس من قبل الباحثين(Rousseeuw and Croux)في عام (١٩٨٧) حيث ان هذا المقياس هو من المقياس الحصينة التي يستخدم للكشف عن القيم الشاذة في البيانات ويرمز له بالرمزRCوهو عبارة عن حاصل قسمة القيمة المطلقة لانحرافات المشاهدات عن الوسيط (Me)على وسيط القيمة المطلقة لانحرافات الوسيط عن مشاهدات العينة (MADN) (Normalized Median Absolute Deviation from the Sample median) ويمكن إيجاد قيمة هذا المقياس بتطبيق الصيغة الآتية:

If $RC=\frac{|x_{i-Me}|}{MADN}>2.5$;then x_i is an outlier ....(4)

حيث $MADN=1.4826*median\{|x_{i-Me}|\}$

أن :

=1.4826*MAD

X_i :تمثل مشاهدات المتغير التوضيحي.

Me: تمثل الوسيط.

وان إي قيمة اكبر من (2.5) هي قيمة شاذة .

٤-معيار الحكم على دقة مقدرات معلمات نموذج الانحدار.[5]

متوسط مربع الخطأ(MSE)Mean Squares Error

وهو مقياس للدقة يحسب بتربيع الخطأ لكل مشاهدة من مجموعة البيانات ومن ثم إيجاد المعدل أو متوسط القيمة لمجموع هذه المربعات وهو يعطي وزنا كبيراً للأخطاء الكبيرة وينتج ذلك بسبب لان الأخطاء تربع قبل اخذ مجموعها ويمكن توضيحها كما يلي:

$$MSE=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{Y}_i)^2}{n-p-1} \quad \ldots(5)$$

$$MSE=\frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i)^2}{n-p-1} \quad \ldots(6)$$

5-الطرائق الحصينة[7]

بعض طرائق التقدير الحصين Robust estimation Methods

قد تواجه الباحث مشكلة في البيانات مثل ابتعاد بيانات العينة عن التوزيع المفترض وذلك بسبب وجود القيم الشاذة (outlier) توزيع المجتمع قيد الدراسة غير التوزيع المفترض وهذا بسبب الانحرافات عن الافتراضات التي وضعت للطرائق التقليدية لتقدير معلمات النموذج , وقد توصل الابحاث السابقة بان هذه الطرائق تكون غير كفوءة في حالة عدم تحقق احد الافتراضات أو الشروط التي تعتمد عليها

هذه الطرائق . لذلك سعى الابحاث السابقة لإيجاد طرائق أكثر كفاءة ولا تتأثر كثيرا بالانحرافات عن الافتراضات المحددة , وهذه الطرائق تسمى بالطرائق الحصينة(Robust Methods) والتي هي اقل تأثيرا في حالة خرق (Violation) البيانات لشرط من شروط التحليل المستخدمة فان التقديرات الحصينة تكون قياسية العدد عند تقدير معلمات النموذج الخطي ,كما أنها تؤدي إلى التقليل من تأثير الارتباط الذاتي والتعدد الخطي لذا فان التقديرات الحصينة تمثل معلمات النموذج الخطي في حالة وجود قيم شاذة وبالرغم من وجود طرق حصينة مختلفة ألا أن اغلبها تشترك بنقطتين أساسيتين احدهما أعطاء وزن اقل للمشاهدة الشاذة (أن وجدت)وذلك للتقليل من تأثيرها والأخرى هي استخدام أسلوب التكرار .

٦-طريقة مقدرات (M).[1]

تعتبر طريقة التقدير (M) واحدة من أهم الطرائق الحصينة والتي ازداد الاهتمام بها مؤخرا من قبل العديد من الباحثين,إذا أشارت اغلب الدراسات أن هذه الطريقة تعد من أكثر الطرائق الحصينة سواء في كفاءتها المكافئة لطريقة المربعات الصغرى عندما تتوزع الأخطاء توزيعا طبيعيا بوسط (صفر) وتباين σ^2 أي $N(0,\sigma^2)$, وتكون كفاءتها أعلى من كفاءة المربعات الصغرى عندما لأتوزع الأخطاء توزيعا طبيعيا أو عند وجود قيم شاذة في البيانات , وقد وسع(Huber,1973) نتائجه للتقدير الحصين من معلمة الموقع إلى حالة الانحدار الخطي. وقد اكتسبت هذه التقديرات شهرة أكثر من بقية المقدرات الحصينة الأخرى لأنها أكثر مرونة وكذلك توفر إمكانية تعميمها مباشرة إلى الانحدار المتعدد , وتقوم فكرة طريقة التقدير(M) من خلال تحوير الأسلوب المتبع في طريقة المربعات الصغرى, حيث أن هذه الأخيرة تهدف إلى تصغير المقدار الآتي :-

$$\text{Min } \sum_{i=1}^{n} e^2 = \text{Min} = \sum_{i=}^{n} \left(\underline{y} - X\underline{\beta}\right)' \left(\underline{y} - X\underline{\beta}\right) \quad \ldots(7)$$

حيث أن (y_i)تمثل المشاهدة (i) من متجه الاستجابة(X_i)ويمثل الصف (i) في المصفوفة, X ,تعني تصغير مجموع مربعات الأخطاء , أما طريقة مقدرات (M) تهدف إلى تصغير المقدار.

$$\text{Min } \sum_{i=1}^{n} \rho(e_i) = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} \rho(\underline{y} - X\underline{\beta}) \qquad \ldots(8)$$

حيث أن ρتمثل دالة بدلالة الأخطاء ولتصغير الدالة (٨) نشتقها جزئياً بالنسبة لموجه الآتية ومساواتها بالصفر وكما يلي :-

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Psi(\underline{y} - X\underline{\beta}). \qquad \ldots(9)$$

حيث أن Ψ تمثل المشتقة الجزئية للدالة (ρ) بالنسبة للمعلمات في المعادلة (٩) وتمثل منظومة مكونة من(P) من المعادلات وتحل باستخدام أحدى الطرق العددية المعروفة أو طريقة المربعات الصغرى الموزونة(Weighted Least Squares Method) ولإيجاد مقدرات (M) التي تحقق المعادلة (٩) وذلك باستخدام الصيغة الآتية :-

$$\hat{\beta}_M = (X'\underline{W}X)^{-1}X'\underline{W}\,\underline{y} \qquad \ldots(10)$$

حيث أن$\underline{w}$() تمثل مصفوفة الأوزان وهي مصفوفة قطرية (n×n)عناصرها القطرية معطاة بالصيغة الآتية :-

$$W_i = \frac{\Psi(e_i)}{(e_i)} = \frac{[\Psi(y_i - X_i\underline{\beta_0})]}{(y_i - X_i\underline{\beta_0})} \qquad \ldots(11)$$

حيث إن $\underline{\beta_0}$ تمثل القيم الابتدائية لمتجه معلمات النموذج ويتم استخدامها لتحديد الأوزان ويمكن استخدام مقدرات المربعات الصغرى كقيم ابتدائية ومن التكرار الأول نجد قيمة $\underline{\hat{\beta}_1}$وفي التكرار الثاني نستخدم$\underline{\hat{\beta}_1}$ في إيجاد الأوزان لإيجاد $\underline{\hat{\beta}_2}$ وهكذا تستمر عملية التكرار حتى نحصل على مقياس التقارب (Convergence)المعرف بالصيغة الآتية :-

$$\text{Max}[|\hat{\beta}_j^{(n)} - \beta_j^{(n-1)}| \quad] < \delta \qquad \ldots(12)$$

حيث (δ) تمثل قيمة صغيرة جدا و(n) تمثل رقم التكرار أي أن الحل يتوقف عندما يصبح الفرق المطلق بين المعلمات المقدرة في المرحلة الحالية والمرحلة السابقة أصغر من القيمة المختارة(δ) ولجعل مقدرات (M) تمتلك خاصية [Scale Invariant]فان الدالة المطلوب تصغيرها هي:-

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} \rho(y_i - X_i\underline{\beta}) / \hat{\sigma} \qquad \ldots(13)$$

نشتقها لالنسبة للموجه$\underline{\beta}$ وثم مساوتها للصفر

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}\Psi(y_i - X_i\underline{\beta})/\hat{\sigma} = o \qquad \ldots(14)$$

يمكن حل المعادلة أعلاه باستخدام الصيغة (11).

حيث أن الأوزان يتم إيجادها وفق الصيغة الآتية:-

$$W_i = \frac{[\Psi(e_i/\hat{\sigma})]}{(e_i/\hat{\sigma})} = \frac{[\Psi\left(\frac{y_i - X_i\underline{\beta}}{\hat{\sigma}}\right)]}{\left(\frac{y_i - X_i\underline{\beta}}{\hat{\sigma}}\right)} \qquad \ldots(15)$$

ولإيجاد $\hat{\sigma}$ في المعادلة اعلاه والتي تمثل قيمة المقدار المعياري وان هذه القيمة تقدر مرة واحدة فقط باستخدام القيم الأولية قبل البدء بالتكرار وهناك عدة صيغ لتقديرها منها:

$$1-\hat{\sigma} = 1.5\ med\ |e_i|$$

$$2-\hat{\sigma} = 2.1\ med\ |e_i|$$

$$3-\hat{\sigma} = 1.485[med|e_i - med\ e_i|]$$

$$4-\ [med\ |e_i|]/0.6745$$

حيث أن e_i تمثل البواقي (Residuals) و med يشير إلى الوسيط . ولقد اقترح الباحثون عدد من الدوال $\rho(.)$ او مشتقاتها $\Psi(.)$بحيث تجعل نتائج التقدير جيدة ولا تتأثر بوجود الشواذ وفيما يلي بعض الدوال المهمة لهذا النوع من المقدرات والمعرفة بدلالة الدالة$\Psi(\ e_i)$. وبافتراض أن وسيط الأخطاء المطلقة (Median Absolute Deviation) (MAD) وبأخذ الصيغة التالية

$$MAD = median|e_i - median(e_i)|/0.6745$$

١ – دالة TukeyBisquare[10]

$$\Psi_{Bisquare}(e_{is}, c) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{e_{is}}{c}\right)^2\right]^2 & if|e_{is}| \le c \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \dots (16)$$

حيث أن c تأخذ القيمة الافتراضية $c = 4.685$

2– دالة Huber[13]

$$\Psi_{Huber}(e_{is},c)=\begin{cases}1 & if|e_{is}|\le c\\ \frac{c}{|e_{is}|} & otherwise\end{cases} \quad \ldots(17)$$

حيث أن c تأخذ القيمة الافتراضية$c=1.345$.

3 -دالة Hampel[11]

$$\Psi_{Hampel}(e_{is},c)=\begin{cases}1 & if|e_{is}|\le a\\ \frac{a}{|e_{is}|} & if\, a<|e_{is}|\le b\\ \frac{a(c-|e_{is}|)}{|e_{is}|(c-b)} & b<|e_{is}|\le c\\ 0 & otherwise\end{cases} \quad \ldots(18)$$

حيث أن القيم الافتراضية لثوابت القطع (Tuning Constants) تكون في برنامج S-Plus:

$$a=2 \quad b=4 \quad \text{and } c=8$$

وهناك بعض المصادر تفترض قيم أخرى لثوابت القطع.

مثل:

$$a=1.7 \quad b=3.4 \quad \text{and } c=8.5$$

٧-دالة Andrews [8]

$$\Psi_{\text{Andrews}}(e_{is},c)=\begin{cases}\left[1-\left(\frac{e_{is}}{c}\right)^2\right]^2 & if|e_{is}|\le c\\ 0 & otherwise\end{cases} \quad \ldots(19)$$

٧- مفهوم المجموعة المضببة.[3] ,[21],[6] The concept of fuzzy set

يعتبر الباحث (Lotfizadeh)[6] في عام (١٩٦٥)هو أول من طرح فكرة المجموعة الضبابية .فمن المعروف في نظرية المجموعات الاعتيادية بان العنصر في المجموعة يأخذ قيمتين هما {0,1} فإذا

كانت لدينا المجموعة الشاملة X وكانت Aهي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة X فان اي عنصر من عناصر المجموعة الشاملة أما ينتمي إلى المجموعة الجزئية A أو لاينتمي إلى المجموعة الجزئية A.

اما المجموعة الضبابيةهي المجموعة التي تمتلك عناصرها نسبة انتماء معينة إلى دالة العضوية(membership function) والتي تكون إعداد حقيقية ضمن الفترة المغلقة [١،٠]ويعبر عن دالة العضوية بدالة ألانتماء(MA(xمن المتغير التي تمثل درجة انتماء العنصر xإلى المجموعة المضببة A وتكتب بالشكل العام الأتي : $MA\ (x): x \rightarrow [0,1]$

يتغير الانتماء للعناصر من العضوية التامة إلى عدم العضوية، فهي تمتلك عضوية إما تامة، أو عضوية جزئية أو لا تمتلك عضوية ، عليه فان عناصر المجموعات الاعتيادية(crisp set) لها انتماء تام أي إن ($\mu_{\tilde{A}}$ ١) او ما يدعى بالعناصر الجازمة (α . Crisp)من المفاهيم المتعلقة بالمجموعة المضببة هو مجموعة القطع α . cut فان Aهي مجموعة تحوي عناصر x لها درجة انتماء لا تقل عن النسبة α لتعبر عن درجة انتماء العناصر المهمة والتي تدعى مجموعة المستوى(α . level).

٨- الأعداد الضبابية Fuzzy numbers[14]

يعرف العدد الضبابي $\tilde{A}$ هو عبارة عن مجموعة ضبابية على خط الأعداد الحقيقي R ولابد أن يحقق الشروط التالية:

١- يوجد على الأقل عنصر واحد X_0 R∈ بحيث أن $\mu_{\tilde{A}}$ =١ .

٢- $\mu\tilde{A}$ (X)هو زوج مرتب مستمر.

٣- $\tilde{A}$لابد أن يكون طبيعي ومقعر (محدب).

٩ – دالة الانتماء The membership function [4]

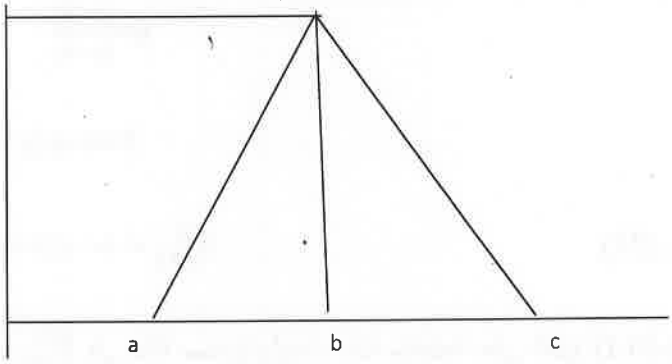
هي دالة تعبر عن درجة الانتماء او درجة العضوية والتي تكون أعداد حقيقية ضمن الفترة المغلقة [0,1] ويعبر عنها بدرجة العضوية أو الانتماء ($M(F_{(x)})$) التي تمثل درجة انتماء العنصر من المتغير x الى المجموعة المضببة (fuzzy set) .

١٠– الدالة المثلثية Triangular function[9]

هي من أكثر دوال الانتماء وأكثرها شيوعا واستخداما وتمتلك هذه الدالة ثلاث معلمات أساسية (a,b,c) والهدف منها تخصيص اقل كلفة للوصول إلى الحل الأمثل الضبابي ألمثلثي بحيث اي عدد ضبابي مثلثي يمكن تمثيله بواسطة ثلاثة إعداد حقيقية.

$$M_B(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)}{(b-a)} & a \le x \le b \\ 1 & x = b \\ \frac{(c-x)}{(c-b)} & b \le x \le c \end{cases} \quad \ldots(20)$$

a: الحد الأدنى. b: الحد الوسط(المركز). c:الحد الأعلى .



شكل رقم (١)

يوضح دالة الانتماء المثلثية.

١١-الدالة الرتبيةRanking function[12],[16]

تلعب الدالة الرتبية في الإعداد الضبابية دور كبيرا في تحليل البيانات للمساعدة على اتخاذ القرار الأمثل وقد تم اقتراح هذه الطريقة من قبل Jain yager (1976)[12] وقد استخدم هذه الطريقة عدة باحثين لترتيب الإعداد الضبابية واستخدام قاعدة شبة المنحرف التي اقترحها الباحثان Lee and (2008) Ghenحيث تعتمد هذه الطريقة على الإعداد الضبابية التي لها دور كبير في تحليل واتخاذ القرارات والتنبؤ حيث تم استخدامها في نظرية المجموعة او الإعداد الضبابية المقترحة من قبل العالم zadehحيث تم اختيار دالة الترتيبية$F(R)$ حيث أن $F(R) \longrightarrow R$ هي دالة تمثل مجموعة أرقام الضبابية المعرفة على خط الإعداد الحقيقية وأصبح جزء مهم ترتب الأرقام الضبابية لاتخاذ القرارات في بيئة الضبابية (الغامضة) وأصبحت واحدة من المشاكل الرئيسة في نظرية المجموعة الضبابية وقد اقترح Yager الترتيب على أساس النقطة الوسطى.

وباستخدام α–cat حيث أن $\epsilon\alpha[0,1]$ نحصل على :

$$\alpha=\frac{(c-x)}{(c-b)} \qquad \alpha=\frac{(x-a)}{(b-a)}$$

$$X=c-\alpha(c-b) \qquad x=a+\alpha(b-a)$$

$$\breve{B}^{U}_{(\alpha)} = c-\alpha(c-b) \ldots(22) \qquad \breve{B}^{L}_{(\alpha)} = a+\alpha(b-a) \ldots(21)$$

حيث أن $\breve{B}^{L}_{(\alpha)}$ و $\breve{B}^{U}_{(\alpha)}$ هي دالة مستمرة وليست دالة متقطعة على الفترة [0,1] وان .

$$[\breve{B}^{L}_{(\alpha)}, \breve{B}^{U}_{(\alpha)}] \text{ where } \breve{B}^{L}_{(\alpha)} \leq \breve{B}^{U}_{(\alpha)}$$

$$\breve{B}^{U}_{(\alpha)} = \sup\{x: \tilde{B}_{(X)} \geq \alpha\} \qquad \breve{B}^{L}_{(\alpha)} = \inf\{x: \tilde{B}_{(X)} \geq \alpha\}$$

١٢- الخوارزميات المستخدمة.

الخوارزمية الأولى[14]The First algorithm

تم اقتراح هذه الطريقة من قبلBasirzadeh في (2011) بالاعتماد على الطريقة المقترحة من قبل yager عام (١٩٨١) في أيجاد الدالة الرتبية لدالة شبه المنحرف ودالة الانتماء المثلثية التي تعبر عن الدالة الرتبية حيث ان :R $\longrightarrow$ RF(R) .

وباستخدام دالة الانتماء في المعادلة (٢٠) وتطبيق المعادلة (٢١) و(٢٢) نحصل على :

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{1}{2}\int_0^1[\check{B}^L_{(\alpha)}+\check{B}^U_{(\alpha)}]\,d\alpha.$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{1}{2}\int_0^1[a+\alpha(b-a)+c-\alpha(c-b)]\,d\alpha.$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{1}{2}\int_0^1[\alpha(2b-a-c)+(a+c)]\,d\alpha.$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^2}{2}\Big|_0^1(2b-a-c)+\alpha\Big|_0^1(a+c)\right].$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2b-a-c)+(a+c)\right].$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{1}{4}(2b-a-c)+\frac{1}{2}(a+c).$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{2b-a-c+2a+2c}{4}.$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{1}{4}[a+2b+c].$$

الخوارزمية الثانية[15]The second Algorithm

تم اقتراح هذه الخوارزمية من قبل NagoorGani وAbass عام (٢٠١٣) باستخدام فكرة Chiangعام (٢٠٠٥) حيث درست وطبقت على الأعداد الضبابية فقط ,حيث w هو الوزن ل $\check{B}^{L}_{(\alpha)}$ و(w−1)هو الوزن ل $\check{B}^{U}_{(\alpha)}$.

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{\int_0^1 \alpha[w\check{B}^{L}_{(\alpha)}+(w-1)\check{B}^{U}_{(\alpha)}]}{\int_0^1 \alpha d\alpha}\, d\alpha.$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{\int_0^1 \alpha[w(a+\alpha(b-a))+(w-1)(c-\alpha(c-b))]}{\int_0^1 \alpha d\alpha}\, d\alpha.$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{\int_0^1 \alpha[wa+w\alpha(b-a)+(w-1)c-(1-w)\alpha(c-b)]}{\int_0^1 \alpha d\alpha}\, d\alpha.$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{\int_0^1 [\,\alpha\, wa+\alpha^2 wb-\alpha^2 wa)+(w-1)\alpha c-(1-w)\alpha^2 c+(1-w)\alpha^2 b)]}{\int_0^1 \alpha d\alpha}\, d\alpha.$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{\left[\frac{\alpha^2}{2} wa+\frac{\alpha^3}{3} wb-\frac{\alpha^3}{3} wa+\frac{\alpha^2}{2}(1-w)c-\frac{\alpha^3}{3}(1-w)c+\frac{\alpha^3}{3}(1-w)b\right]_0^1}{\frac{\alpha^2}{2}\Big|_0^1 d\alpha}.$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{\frac{[3\, wa+2wb-2\, wa++3\, c-3wc-2c+2wc+2b-\,2wb]}{6}}{\frac{1}{2}}.$$

$$R(\tilde{B}_{(X)})=\frac{1}{3}[w(a-c)+2b+c].$$

١٢- الجانب التطبيقي.

في هذا الجانب من البحث تم تطبيق ما ورد في الجانب النظري على بيانات لدراسة تتمثل بتأثير معدل نمو الاطفال بالنسبة الى عمر الطفل بالشهور لعينة حجمها (٢١) طفل تم استخدمها في اغلب المصادر .[١٧]

الجدول (١)

يبين معدلات نمو الأطفال وعمر الأطفال بالأشهر لسنة ١٩٨٧.

n	Y	X
1	95	15
2	71	26
3	83	10
4	91	9
5	102	15
6	87	20
7	93	18
8	100	11
9	104	8
10	94	20
11	113	7
12	96	9
13	83	10
14	84	11
15	102	11
16	100	10
17	105	12
18	57	42
19	121	17
20	86	11
21	100	10

y: تمثل معدل النمو. X : تمثل عمر الأطفال بالأشهر.

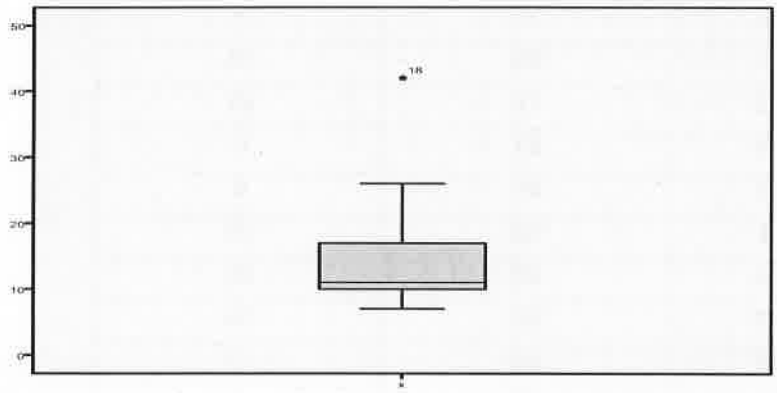
التطبيق العملي للطرائق التقليدية .

طريقة الرسم الصندوقي والقطع المخططة Box and Whisker-Plot

لتطبيق هذه الطريقة استعملت البرامج (SPSS-Excel) وتم الكشف على وجود قيم شاذة في البيانات وتم تطبيق هذه الطريقة على بيانات معدلات نمو الأطفال وباستخدام المعادلة رقم(٢) والمعادلة رقم (٣) أوجدنا القيم المستخرجة لبيانات.

OF_2=141 ,OF_1=22 ,IF_2=115.5 ,IF_1=47.5 ,IQR=17

وتم التوصل أن المشادة (١٨) هي مشاهدة شاذة ; أي أن (X_{18}, Y_{18})=(42,57) هي قيمة شاذة كما في الشكل الأتي .



شكل رقم (٢)

يوضح الرسم الصندوقي بيانات معدل نمو الأطفال ويظهر فيه القيمة الشاذة.

التطبيق العملي للطرائق الحصينة .

الطريقة الحصينة للكشف عن القيم الشاذة لنموذج الانحدار الخطي البسيط.

وبتطبيق المعادلة رقم (٤)حصلنا على النتائج وعند مقارنة النتائج المقياس مع نقطة القطع (٢.٥) نجد أن هناك أربع قيم شاذة وكما مبين في الجدول الأتي .

جدول رقم (2)

يوضح القيم الشاذة لطريقة Rousseeuw and Croux لبيانات معدل نمو الاطفال

تسلسل المشاهدة	قيمة المشاهدة(x)	RC
٢	٢٦	٥.٠٥٨٦٨١
٦	٢٠	٣.٠٣٥٢٠٨
١٠	٢٠	٣.٠٣٥٢٠٨
١٨	٤٢	١٠.٤٥٤٦١

التطبيق العملي لطريقة معالجة القيم الشاذة بالطرق الحصينة .

طريقة M الحصينة

في هذا البحث تم استخدام الطريقة الحصينة واستخدمت أربع دوال من دوالها وكما مبين في الجدول أدناه قيم المتوسطات الحصينة التي استخدمت في أيجاد المقدرات لمعلمات نموذج الانحدار.

تم استخدام برنامج SPSS للحصول على النتائج كالأتي:-

جدول رقم(3)

يوضح قيم المتوسطات الحصينة لدوال طريقة M لبيانات معدل نمو الأطفال.

M-Estimators

	Huber's M-Estimator[a]	*Tukey'sBiweight*[b]	*Hampel's M-Estimator*[c]	*Andrews' Wave*[d]
y	94.6142	95.2204	94.6651	95.2213
x	11.8376	10.7095	11.5491	10.7064

a. The weighting constant is 1.339.

b. The weighting constant is 4.685.

c. The weighting constants are 1.700, 3.400, and 8.500

d. The weighting constant is 1.340*pi.

المقاييس والمقدرات التي تم استخراجها للبيانات معدل نمو الأطفال.

حيث تم استخراج معلمات β_0 ,β_1 نموذج الانحدار باستخدام البرامج (Excel- R- SPSS) وتم الحصول على النتائج بالاعتماد على المتوسطات الحصينة لدوال الأربعة للطريقة الحصينة ومن ثم حساب MSE والتي تمثل اقل قيمة تمثل أفضل طريقة يتم الاعتماد عليها.

جدول رقم (٤)

يوضح النتائج للطرق الحصينة لدوال طريقة M لبيانات معدل نمو الأطفال .

الطريقة	الحصين $\overline{x}$	الحصين $\overline{y}$	الحصينة $\hat{\beta}_0$	الحصينة $\hat{\beta}_1$	MSE	الطريقة الأفضل
Huber's M-Estimator[a]	11.8376	٩٤.6142	107.0881	-1.05374	125.178	
Hampel's M-Estimator[c]	11.5491	94.6651	106.6285	-1.03587	120.787	أفضل طريقة
Tukey'sBiweight[b]	10.709	95.2204	105.9098	-0.99813	127.5434	
Andrews' Wave[d]	10.706	95.2213	105.9055	-0.99793	124.3415	
الانحدار الحصين	11.579	94.382	109.305	-1.193	127.5333	

من خلال المقارنة بين النتائج في الجدول (٤) نلاحظ أن أفضل طريقة هي طريقة Hampel's M-Estimator[c] لأنهاأعطت اقل MSE =120.787 لبيانات معدل نمو الأطفال لذلك يتم استخرج الحدود الدنيا والعليا لمعلمات نموذج الانحدار وتم الاعتماد على القوانين التالية باستخدام برنامج Excel ,R.

يتم تطبيق المعادلات الآتية للحصول على حدود الثقة لكل معلمة من معلمات الانحدار $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_0$.

$$\hat{\beta}_1 + t(\frac{\alpha}{2}, 19)\, s(\hat{\beta}_1) > \beta_1 < \hat{\beta}_1 - t(\frac{\alpha}{2}, 19)\ \ s(\hat{\beta}_1)$$

$$\hat{\beta}_0 + t\left(\frac{\alpha}{2}, 19\right)\ \ s(\hat{\beta}_0) > \beta_0 < \hat{\beta}_0 - t\left(\frac{\alpha}{2}, 19\right)\ \ s(\hat{\beta}_0)$$

$$S(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{MSE}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i-\overline{x}})^2}} \qquad S(\hat{\beta}_0) = S(\hat{\beta}_1)\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2}$$

وعند درجة حرية ١٩ للعينة فان قيمة t الجدولية تصبح تساوي ٢.٠٩٣ تحت مستوى معنوية ٩٥٪ وان حدود الثقة للمعلمتين $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_0$ تكون كالاتي:

$$-1.65733 < \beta_1 < -0.4144$$

$$96.47463 < \beta_0 < 116.782$$

وتم استخدام الحد الأدنى والأعلى لإيجاد قيمة ثالثة تكون عبارة عن متوسط الحد الأعلى والأدنى وتكون قيمتها كما مبين أدناه.

β_0^*=106.6285 β_1^*=−1 .03587

بعد اختبار القيم الثلاثة القيمة العليا والدنيا والقيمة الوسطية باستخدام دالة الانتماء المثلثية كما في المعالة(٢٠) يتم تحويل هذه القيم الى أعداد ضبابية وكما مبين أدناه.

$\widetilde{\beta_1}$ = (a=−1.65733 , b =−1 .03587 , c=−0.4144)

$\widetilde{\beta_0}$ = (a=96.47463 , b = 106.6285 , c=116.782)

بعد الحصول على الأعداد الضبابية يتم استخدامها في الدالة الرتبية للحصول على أفضل مقدرات تمثل معلمات التوزيع.

١- استخدام الخوارزمية الأولى $R(\widetilde{\beta}) = ١/٤$ [a+2b+c]

تم الحصول على النتائج الآتية

β_1= - ١.٠٣٥٨٧ $\beta_0 = 106.6285$

حيث أعطت الخوارزمية الأولى نفس النتائج لطريقة الحصينة باستخدام دالة Hample.

٢- استخدام الخوارزمية الثانية $R(\widetilde{\beta}) = ١/٣$ [w(a−c)+2b+c].

تم الحصول على نتائج المقدرات بالإضافة الى MSE بالاعتماد على قيمة الوزن W والتي تراوح بين W= [0,1] حيث تم أيجاد جميع القيم (W) الموزونة وكالاتي:

جدول رقم (٥)

يوضح النتائج التي تم الحصول عليها عند تطبيق الخوارزمية الثانية لبيانات معدل نمو الأطفال.

أفضل مقدرات	MSE	β_1	β_0	w
	١٥٣.٢٦٣٧١	-١.٢٧١٣١٥٠٧	٢١٢.٢٩٨٥٤	0.1
	١٤٩.٩٧٨٨٨	-١.٢٦٦٦٨٤٩	٢٠٤.٩٧٧٤٨٧	0.2
	١٤٦.٣٣٨٨٣	-٠.٢٥٦٠٤١٩٢	١٤٤.٤٧٨٩٤٢	٠.٣
	١٣٦.٩٤٣٩٨	٠.٢٤٨٤٠٥٣٥	١٣٠.٦٤٣٩٠	0.4
أفضل طريقة	١١٧.٥٨٣٢٤	١.٥٣٤٧٨٩٩	١٠٧.٦٤٩٨٣	0.5
	٣٨٣.٢٣٥٩١	٠.٢٣٣١٣٢٢	٩٩.١٨٥٩٣	٠.٦
	٩٤٥.١٣٢٨٢	٠.٢١٧٨٥٩٠٥	٦٦.٢٣٩٤٣٩	0.7
	١١٤٨.٠٩٦٣٦	٠.٢٠٢٢٢٤٨	٢٩.٥٢٢٥٩٤	0.8
	١٢٥٢.١٢٦١	٠.٢٠٢٥٨٩١	٢٣.٢٣٧٨٠٩	٠.9
	١٣٧٤.٨٩٦٥٤	٠.١٩٤٩٤٩٣٣	٢٠.٣٩٥٢	1

من خلال ملاحظة النتائج في الجدول أعلاه تبين أن المقدرات التي أعطت اقل قيمة متوسط مربعات الخطأ MSE=١١٧.٥٨٣٢٤ هي عندما w=0.5 حيث ان :

$\beta_0 = ١٠٧.٦٤٩٨٣$ $\beta_1 = ١.٥٣٤٧٨٩٩$

أفضل مقدرات تمثل نموذج الانحدار لبيانات معدل نمو الأطفال.

- **الاستنتاجات Conclusions**

١- كشفت طريق الرسم الصندوقي اللامعلمية التقليدية وبينت ما هي قيم الشواذ في العينة فقد ظهرت في العينة بان المشاهدة (١٨) قيمة شاذة .

٢- أما مقياس (Rousseeuw and croux) الحصين فقد بين بان هناك مجموعة من المشاهدات الشاذة في البيانات ففي العينة ظهرت بان المشاهدات (١٠،٦،١،١٨) هي قيم شاذة في بيانات العينة, وبالتالي فان الطريقة الحصينة هي أكفا في أظهار مشاهدات القيم الشاذة في البيانات من الطريقة التقليدية .

٣- أظهرت الدراسة بان أفضل دالة من الدوال M الحصينة هي دالة (Hampel) فقد أعطت اقل متوسط مربعات خطا من بين الدوال المستخدمة الأخرى لذلك فقد تم الاعتماد على تقديرات معلماتها المستخرجة $\hat{\beta}_0$,$\hat{\beta}_1$ الاعتيادية ومن ثم ايجاد حدود الثقة لهذه المعلمات من خلال استخدام دالة (Hampel) .

٤- ولوُحظ أن الخوارزمية الأولى أعطت نفس نتائج تقديرات معلمات التقديرات الحصينة في دالة (Hampel).

٥- ولوُحظ أن الخوارزمية الثانية أعطت نتائج أفضل لتقدير المعلمات من معلمات التقديرات الحصينة في دالة (Hampel) عندما $w=0.5$.

- **التوصيات Recommendations**

١- نوصي باستخدام نموذج الانحدار الخطي المتعدد في التقديرات الحصينة و دمجها ومزجها مع الأعداد الضبابية والدوال الرتبية .

٢- نوصي باستخدام دالة العضوية شبة المنحرف الضبابية واستخدام الدوال اللاخطية الضبابية في التقديرات الحصينة مع الدوال الرتبية.

٣- نوصي باستخدام أسلوب المحاكاة في اختبار كفاءة وفاعلية الطرائق الحصينة من خلال اختبارها تحت توزيعات احتمالية مختلفة ودمجها ومزجها مع الإعداد الضبابية والدوال الرتبية.

٤- نوصي باستخدام الطرائق الحصينة بدلاً من الطرائق الاعتيادية في حالة وجود قيم شاذة في البيانات.

٥- استخدام الأعداد الضبابية بالإضافة إلى الدوال الرتبية فهي تعطي تقديرات أفضل للمعلمات في النماذج الخطية والنماذج غير الخطية.

المصادر :-

المصادر العربية

١- الدباغ , ظافر عاصم , (٢٠٠٠) , " الانحدار الخطي الحصين بالاعتماد على تقديرات –M" ,المؤتمر العلمي الثاني للجمعية العراقية للعلوم الإحصائية .المجلد ٨, ص ١-١٨٧.

٢- الراوي, خاشع محمود , (١٩٨٧)," المدخل إلى تحليل الانحدار " مديرية دار الكتب للطباعة والنشر , جامعة الموصل , العراق.

٣- الساعدي, عبد العباس كاظم ,(١٩٩٣)," استخدام دالة Fuzzy والمعلمات التصادفية للتنبؤ عن الهيكل التدريسي في جامعة بغداد" ,رسالة ماجستير في الإحصاء , كلية الإدارة والاقتصاد, جامعة بغداد.

٤- الطائي , فاضلة علي جيجان , (٢٠٠٧), " الضبابية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي " , رسالة ماجستير , كلية الإدارة والاقتصاد , الجامعة المستنصرية.

٥- الطالب، ضياء مجيد, الطالب، بشار عبد العزيز و الطالب، علي ضياء ,(2011),"استخدام بعض الطرق الإحصائية الحصينة لتحديد الانجازات المتوقعة بمسابقة الطفر والقفز للرجال في دورتي لندن وريودو جانيرو الاولمبيتين (2016,2012)",مؤتمر القادسية , منشور في وقائع المؤتمر , جامعة القادسية, العراق .

٦- سلمان, سرمد عبد الحسين,(٢٠٠٤),"تصميم أنظمة السيطرة الضبابية الديناميكية غير الخطية" , رسالة ماجستير , كلية العلوم, جامعة النهرين.

٧- صالح, ذكاء يوسف عزيز ,(٢٠٠٩),"مقارنة بعض الطرق الحصينة لتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد", رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة الى مجلس كلية علوم الحاسبات والرياضيات, جامعه الموصل , العراق.

المصادر الأجنبية

8- Andrews ,D.F. , Bickel , P.J. , Hampel , F.R. , Huber , P.J. , and Thkey, J.W . (1972) ." Robust Estimates of Location : Surrey and Advances ", Princeton university press , Princeton , N.J.

9- Basirzadeh ,H (2011),"An Approach for Solving Fuzzy Transportation problem " Applied Mathematical sciences, Vo1.5,No 32,pp 1549-1566.

10- Beaton , A.E., and Tukey ,J.W.,(1974)"The Fitting of Power series Meaning Polynomials, Illustrated on band – Spectroscopic Data", Techno metrics , 16 , 147 – 185 .

11- Grubbs , F.E.(1969),"Procedures for Detecting Outlying observation", Technimetrics.

12- Hajjari,T.Barkhordary,M.,(2007),"Ranking fuzzy number by Sing Length " First Joint congress on fuzzy and Intelligent Systems Ferdowsi University of Mashhad ,Iran.

13- Huber,P.J.,(1964)."Robust Estimation of location parameter". Ann .math .stat.35-73-101.

14- NagoorGani , A. and Abbas ,S.,(2013) "A New Method for solving Intuitionistic Fuzzy Transportation problem" Applied Mathematical sciences, Vo1.7,No 28,pp 1357-1365.

15- Nareshkumar, S., Kumara Ghuru, S.,(2014) "Solving Fuzzy Transportation problem Using Symmetric Triangular Fuzzy Number" International Journal of Advanced Research in Mathematics and Application ,Vol .1,pp74-83.

16- Prodanovic Predrag ,(2001),"Fuzzy Set Ranking Methods and Multiple Expert Decision Making " Report No.039, The University of Western Ontario, Faculty of Engineering Science ,Canada ,pp 17-32.

17- P.J .Rousseeuw ,A.M. Leroy (1987),"Robust Regression and outlier Detection ", wiley ,p.79.

18- Reed, J.F. (1998)."Contribution to adaptive Estimation ", Journal of Applied Statistics ,25,651-669.

19- Taheri , S., Mahmud ,(2003),"Trends in fuzzy statistics " Austrian Journal of statistics , vol 32 , Number 3 , 239-257 .

20- Tukey . J.W. (1977) . Exploratory data analysis . Addison-Wesley .

21- Zimmermann H.J.,(1985)"Fuzzy set theory and its applications ", Kluwer-Nijhoff publishing ,Boston.