بحوث العمليات

المرحلة الثالثة

قسم ادارة الاعمال

الدراسة الصباحية/ المسائية

م.د.أسيل ناصر حسين

الفصل الاول

Operations Research

نشأة ومراحل تطور بحوث العمليات

تعبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي احرزت نجاحا واسعا في المجالات العسكرية والمدنية.

وتمتد الجذور التاريخية لهذا الحقل من حقول المعرفة المتخصصة الى اوائل الحرب العالمية الثانية عندما واجهت القوات البريطانية العديد من المشاكل ممأدى بها الى استخدام اساليب بحوث العمليات لحل العديد من المشاكل التي تواجه الادارة في العمليات الحربية وفي عمليات ادارة الاعمال والادارة الحكومية وذلك لتحقيق الاستخدام الامثل للموارد البشرية والمادية المتاحة.

وبعدها اتسعت رقعة تطبيق بحوث العمليات خلال عام 1941 تشمل قوات الحلفاء وذلك بسبب النجاح الكبير الذي احرزته القوات البريطانية في حل المعضلات الحربية، لذلك قامت القوات الامريكية بتكوين لجنة مماثلة بهدف معالجة مشكلة نقل المعدات والمؤون والذخائر الحربية ومعالجة مشاكل ايجاد انماط جديدة للطيران الحربي وتخطيط عملية زرع الالغام وغيرها.

بعد انتهاء فترة الحرب وبعد الاستخدام الواسع لبحوث العمليات دأب معظم الاختصاصيين الى استخدامها في حل مشكلات مدنية مشابهه مما ادى الى تطور استخدامها في حل المعضلات الادارية، وهكذا انتشر استخدام بحوث العمليات ليشمل مجالات صناعية وتجارية.

هناك عدة عوامل ساهمت في استخدام بحوث العمليات في الصناعة ةهي عوامل تتعلق بالانتاج الواسع للسلع كنتيجة لاتساع حجم السوق المحلية والاقليمية والدولية وشدة المنافسة بين المنشات الصناعية وتعقد وتنوع المشاكل التي تواجه المشاريع.

تعريف بحوث العمليات Operations Research

يدور موضوع بحوث العمليات حول استخدام اساليب التحليل الكمي لمساعدة الادارة في اتخاذ القرارات حول المشاكل التي تواجهها مع الاعتماد بالدرجة الاولى على الاساليب الرياضية المتقدمة عند ادارة انظمة كبييرة من (القوى العاملة، المعدات، المواد الاولية، الاموال في المصانع والمؤسسات الحكومية والقوات المسلحة)

بعبارة اخرى تعرف بحوث العمليات بأنها طريقة علمية تجهز الادارة بقررات كمية حول المشاكل التي تجابهها.

والواقع ان بحوث العمليات يعتبر منهج متكامل لتداول المشاكل التي تواجه الباحث في عمله، اي ان محور اهتمام بحوث العمليات هي وجود مشكلة تتطلب اتخاذ قرار، وتزداد الحاجة الى استخدام بحوث العمليات كلما ازدادت درجة تعقيد المشكلة.

- **خطوات دراسة بحوث العمليات**

يتضمن اسلوب بحوث العمليات خمسة خطوات اساسية وهي على الترتيب:

1- تعريف المشكلة قيد الدراسة
2- صياغة النموذج الملائم للمشكلة
3- حل النموذج
4- اختبار النموذج والحل الناتج منه
5- وضع الحل موضع التطبيق العملي

وفيمايأتي شرح موجز لهذه الخطوات:

1- تعريف المشكلة:

يتم تعريف المشكلة وذلك بتحديد كل من الهدف والبدائل والقيود بالنسبة للهدف قد يتمثل في زيادة الارباح او زيادة الطاقة الانتاجية او تقليل التكاليف.

اما البدائل فهي تحديد طرق العمل المختلفة والتي تستخدم في التقييم حيث يمكن قياس الكفاءة بالربح او بالكلفة او بعدد الوحدات او الوقت ....الخ

اما القيود فهي مجموعة من المحددات كالاموال والايدي العاملة والمعدات والوقت والمواد الاولية....التي تحكم المشكلة وان الحل المقبول يجب ان يتماشى مع القيود التي فرضتها مجموعة الموارد المتاحة.

2- بناء النموذج

ان عمل النموذج هو عملية تمثيل المكونات المشكلة والعوامل المؤثرة والظروف المحيطة بها بشكل اوبصيغة تساعد على فهمها .

وكلمة النموذج تعني عرض مبسط للواقع بشكل او بصيغة تساعدنا من التوصل الى قرار سليم.

وهناك انواع من النماذج منها الرياضية والفيزيائية والتنظيمية.

3- حل النموذج

بعد صياغة النموذج الملائم للمسألة تاتي المرحلة التالية والمتمثلة بحل النموذج لاستخراج مجموعة قيم المتغيرات، يتم الحل بتطبيق اساليب البرمجة الرياضية او البرمجة الاحتمالية اوشبكات الاعمال وغيرها.

4- اختبار النموذج

ان حل الموذج لايعني نهاية المسألة اذ يجب ان يختبر هذا الحل لاظهار قدرة النموذج في تمثيل المسألة،

يتم الاختبار باستخدام بيانات تاريخية وقد يتطلب الامر تحوير النموذج واعادة اختباره الى ان تزول كافة النواقص الموجودة فيه.

5- وضع الحل موضع التطبيق العملي

تأتي هذه الخطوة بعد التاكد من صلاحية النموذج وملائمته للبيانات وتتكون من ترجمة الحل وتحويله الى اساليب عمل ومراقبته وتقديمها الى الجهات المختصة بشكل واضح.

بحوث العمليات

قسم ادارة الاعمال

المرحلة الثالثة

الدراسة الصباحية/ المسائية

المحاضرة الثانية

م.د.أسيل ناصر حسين

استخدامات بحوث العمليات في مجال الادارة الصناعية

إن للتزايد الهائل في قطاع الأعمال وتعدد مسؤوليات الإدارة في المؤسسات الصناعية المتنامية وفي حجم تعقيداتها وازدياد التخصص قد خلق مشكلات جديدة لازالت تحدث في كثير من المؤسسات. احدى هذه المشكلات هي نمو كثير من مكونات المؤسسة المستقلة الى وحدات ذات سلطة مستقلة نسبياً لها اهدافها الخاصة وقيمتها المستقلة ممايفقد الرؤيا الصحيحة لكيفية توافق انشطتها وأغراضها مع المؤسسة ككل. وماهو الافضل بالنسبة لاحدى المكونات غالباً مايعود بالضرر على الاخريات، لذلك قد ينتهي هذا لوصولهم لأهداف متعارضة.

ومن المشاكل المشار اليها انه مع ازدياد التخصص والتعقيد في المؤسسة يصبح اكثر واكثر صعوبة تخصيص الموارد المتاحة سواء كانت هذه الموارد (اموال، افراد، الآت، وقت أو غيرها من الفعاليات المختلفة بطريقة أكثر كفاءة بالنسبة للمؤسسة ككل.

هذا النوع من المشكلات والأحتياج الى اساليب أفضل لحلها فرضت حالة من الحاجة الملحة لبحوث العمليات.

إذن تطبق بحوث العمليات على المسائل التي تتعلق بكيفية التعرف على تنسيق العمليات والانشطة ضمن مؤسسة معينة، كما أن مدى التطبيق واسع بشكل غير عادي.

إن طريقة بحوث العمليات تبدأ بالملاحظة الدقيقة وصياغة المعضلة ثم يبنى نموذج رياضي يحاول استخلاص جوهر المعضلة الحقيقية، ويمكن بعدئذٍ افتراض ان هذا النموذج هو تمثيل دقيق تماماً للمعالم الجوهرية بحيث تكون الاستنتاجات (الحلول) التي تم الحصول عليها من النموذج صحيحة للمسألة الحقيقية.عندئذٍ ينقح هذا الافتراض ويُتحقق منه بالتجربة المناسبة.

وهكذا وبإدراك معين تتضمن بحوث العمليات بحث علمي مبدع في الخواص الأساسية للعمليات.

وعلى وجه التخصيص فأن بحوث العمليات تعنى بالإدارة العلمية للمؤسسة.

خصائص بحوث العمليات

أولاً: وجود معضلة تتطلب اتخاذ قرار يكون محور اهتمام بحوث العمليات وتزداد الحاجة كلما زادت درجة تعقيد المعضلة وتتضمن معضلة اتخاذ القرارعدة عناصر هي:

1- وجود هدف أو اهداف تسعى الى تحقيقها (رفع كفاءة منظومة سلاح، اداء الفرد، وضع خطة تحريك القوات العسكرية....الخ).
2- وجود عدد من البدائل يمكن اتباعها للوصول الى الهدف.
3- وجود بيئة محيطة يتخذ فيها القرار وافراد داخل وخارج المنظومة التي يسيطر عليها ومنظومات اخرى تؤثر على القرارات المتخذة وتتأثر بها.
4- هناك مفاضلة بين البدائل لتحديد البديل الأمثل الذي يجب اتخاذه ليكوّن القرارالأمثل.

ثانياً: وضع الأسس لاتخاذ القرار. تعتمد بحوث العمليات على وضع اساس لمتخذ القرار سواء كان ذلك بشكل نظرية عامة او صورة معيار لتقييم نناتج القرار. كثيراً ماتوضع معايير تقييم لاهداف مرحلية وبذلك توضع الخصائص الاتية للقرار.

1- فاعليته- دقته
2- استمراريته اي له خاصية الصلاحية لفترة
3- امكانية تعديله بتخطيط افعال وعمل قرارات تكميلية.
4- وضع ضوابط على الحل والتنفيذ وشروط التوصل الى النتائج المطلوبة.

ثالثاً: النظرة الشاملة للمعضلة. ونقصد بها مايلي:

1- تحليل النظام الذي تتواجد فيه المعضلة وقد يتم تجزئتها الى معضلات فرعية صغيرة تمثل بمجموعها المعضلة الكلية وحل كل منها بشكل منفصل لتكوّن مجموعة الحلول الحل النهائي للمعضلة الاصلية.
2- تتسع دراسة المعضلة اللى خارج حدود الابعاد الظاهرية لها.
3- تمتد الدراسة لأثر المعضلة والحلول في المستقبل.
4- تؤخذ بنظر الاعتبار الاهداف النهائية وليست المرحلية.

رابعاً:نشاط رفع الكفاءة: تهدف دراسات بحوث العمليات الى رفع كفاءة واداء النظم المختلفة وذلك بمايأتي:

1- الاستغلال الامثل للموارد المتاحة.

2- الاقتصاد بالوقت والتكاليف لانجاز عمل معين دون الاخلال بمستوى الانجاز اي ايجاد موازنة بينهما.

خامساً: استخدام الاسلوب العلمي. واهم خصائصه:

1- واضح ومحدد ويطور استنتاجاته بتقييم نتائجه ذاتياً.
2- موضوعي ويمكن فيه ترجيح الاراء والاستنتاجات بناءاً على مستوى القائم بالعمل اوسلطته.
3- كل نظرية او استنتاج او بديهية يجب التحقق منها سواء كان ذلك منطقياً او تجريبياً او تاريخياً.
4- محاولة وضع معايير كمية ضرورية حيث ان المقاييس غير الكمية لاتكفي.

بحوث العمليات

قسم ادارة الاعمال

المرحلة الثالثة

الدراسة الصباحية/ المسائية

المحاضرة الثالثة

م.د.أسيل ناصر حسين

تعريف النموذج

النموذج هو تمثيل لمكونات المعضلة او النظام والعوامل المؤثرة والظروف المحيطة واسلوب الربط بين المتغيرات، والنموذج يعرض بعض الاستفسارات التي تحيط بالمعضلة او النظام ويستخدم لغرض التنبوء والسيطرة.

ان عملية وضع النموذج هي وسيلة للتوصل الى قرار سليم. يستند التحليل المنطقي لجميع المعضلات التي تجابه متخذ القرار على النماذج ومفهومها وشكل بناؤها. ولبناء نموذج يجب تحديد الهدف او الاهداف التي تتواخاها الادارة.

ان جميع النماذج تصاغ لكي تعمل على نحو مثالي وهي لاتمثل الحقيقة كلها بل جزء منها وبشكل تجريدي انها تصمم لغرض تجعلنا ندرك ونفهم هذه الحقيقة.

فوائد النماذج

1- افضل اسلوب متاح لدراسة معضلات اتخاذ القرار.
2- اكثر سهولة واقل كلفة واقصر وقت لوصف المعضلة من القيام بتجارب واقعية.
3- تساعد في معرفة وتحديد تأثير مدى التغيرات الحاصلة في متغير واحد او اكثر للكيان الذي يمثله النموذج على المتغيرات الاخرى او على المجموعة بكاملها حيث يمكن استخدام النماذج لمعرفة ذلك بواسطة اجراء التغيير على النموذج بدلا من فرض التغييرات على الكيان نفسه.
4- يمكن اسنخدام النموذج بعد فحصه وتجريبه لحل معضلات ذات طبيعة مشابهه شريطة ان يكون المحلل قد حدد صيغة المعضلة وامكانية حلها باستخدام النموذج المعني.

انواع النماذج

ان النماذج المستخدمة في بحوث العمليات مختلفة ومتشعبة منها:

1- **النماذج المادية:** وهي النماذج التي تحاكي الاصل الذي تمثله حيث انها نسخة مصغرة او مكبرة من المواصفات الأساسية لذلك الشيء ، مثال على ذلك نموذج مصغر لطائرة. هذه النماذج ملائمة لاظهار حالة الشيء سواءاً كان في حالة الاستقرار او الحركة وتحت ظرف زمني معين. ومع ذلك لايمكن للنماذج المادية ان تمثل المواقف الحركية في العمليات الانتاجية في مصنع مثلا، لهذا السبب فهي غير ملائمة للاستعمال في دراسة تاثير التغييرات في عملية ما او نظام بشكل مرضٍ وهي غير قادرة على اظهار العلاقات الطارئة او العرضية.

2- **النماذج الرياضية او الرمزية:** وهي اكثر النماذج تجريداً وتستخدم فيها مجموعة من الرموز تمثل شكل السؤال.
ينصب اهتمامنا الرئيسي في بحوث العمليات على هذا النوع من النماذج لكونها قادرة على التنبوء بالنتائج المنطقية والى المدى الذي يجعل منطق الرياضيات يتماشى الى درجة ما مع حركة الواقع التي تمثلها، ويتخذ النموذج بصورة عامة شكل مجموعة من معادلات تمثل متغيرات بارزة في العملية وماينتج عنها.
ويتم وضع تحديدات على قيم المتغيرات متمثلة بمجموعة من معادلات او متباينات.
فالمعادلة تتميز بالرقة والايجاز وسهولة الفهم والرموز المستعملة بالنسبة الى الكلمات ليست سهلة الاستخدام فحسب ولكنها سهلة الفهم والادراك والنتائج المستخلصة من الرياضيات التي ترتبط بالحقيقة الى حد كبير.
وقد ترتبط بمحاولة التنبوء بسلوك شيء وعملية واقعية.
وللنماذج الرياضية فائدة اضافية وهي امكانية معالجتها باستخدام الحاسب الالكتروني ، وغالباً ما تكون وظيفة النموذج الرياضي شرح المعضلة اكثر من وصفها فهي بذلك ملائمة جداً للتنبوء او تعيين التغيرات على النظام الحقيقي.

3- **النماذج البديلة:** النموذج البديل هو تمثيل مجموعة خصائص معينة بمجموعة خصائص اخرى وهو يساعد على تمثيل المواقف الحركية للعمليات او النظم وذلك وفق القواعد البديلة. وللنموذج البديل فائدة اخرى هي عند مقارنته مع النموذج المادي يمكن اجراء بعض التغييرات الطفيفة على الأول ليمثل عمليات مختلفة لذا فالنموذج البديل نجده اكثر استخداماً وشيوعاً من النموذج المادي.

بناء نماذج البرمجة الخطية

ان الهدف الاساس من استعمال نماذج البرمجة الخطية هو حل مشكلة ما تواجه الادارة ولذلك يتم الاستعانة بالبرمجة الخطية، وهنا يستلزم الامر نقل المشكلة من حالتها الاولية (حالة الكلام او الحالة الانشائية والمتمثلة بالسرد الكلامي لتفاصيل المشكلة كافة) الى حالة المعادلات والمتباينات المعبرة عن المشكلة قيد الدرس. ولذلك يجب ان توضح المشكلة الاصلية وتفاصيلها كافة. وبالتالي يمكن ايجاد الحل الرياضي لنموذج البرمجة الخطية. ويتكون نموذج البرمجة الخطية (من مجموعة من المعادلات والمتباينات بالاضافة الى دالة الهدف). ومماتجدر الاشارة اليه ان لكل مجموعة من المعادلات حلاً، وعادة ماتكون للمعادلات الانية حلول لايجاد قيم المتغيرات، وعند حل نموذج البرمجة الخطية دائماً نسعى الى ايجاد الحل الأمثل (اي الحل الذي يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف objective function) وتكون الحلول على ثلاثة انواع:

1- الحل Solution

وهو حل ممكن الوصول اليه في اية مجموعة من المعادلات.

2- الحل الممكن Feasible solution

وهو الحل الذي يمكن ايجاده بعد التوصل الى الحل الممكن ، وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.

3- الحل الأمثل Optimal solution

وهو الحل الذي يمكن ايجاده بعد التوصل الى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.

وبهذا الصدد يجب التاكد من ان الحل الممكن لايتحقق بعد وجود الحل، ولايمكن تحقيق الحل الامثل الابعد ان يتحقق الحل الممكن.

صياغة النموذج

الهدف من صياغة نموذج البرمجة الخطية هو الوصول الى مرحلة حل النموذج، وحل النموذج يعني ايجاد قيم $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ التي تجعل قيمة دالة الهدف اكبر او اصغر مايمكن.

$$Minimum \quad or \; Maximum \;\; z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.to$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq, =, \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq, =, \geq b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots &: : : \quad \vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &\leq, =, \geq b_i \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots &: : : \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq, =, \geq b_m \\
x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0
\end{aligned}$$

حيث ان:

n: عدد المنتجات و $j=1,2,\dots,n$

m: عدد المنتجات و $i=1,2,\dots,m$

c_j : ربح الوحدة الواحدة للمنتج j او كلفته

b_i: عناصر الانتاج المتاحة (عدد ساعات العامل، كمية المواد الاولية، كمية العمالة، راس المال ... او اي عنصر من عناصر الانتاج المتاحة في المرحلة الانتاجية i)

a_{ij} : ماتحتاجه الوحدة الواحدة من عنصر الانتاج (المصدر) لانتاجها (عدد ساعات العمل اللازمة في المرحلة الانتاجية i لانتاج وحدة واحدة من المنتج j) او عدد وحدات راس المال التي تحتاجها الوحدة الواحدة للانتاج او عدد العمال الذين تحتاجها الوحدة الواحدة او اي عنصر انتاج اخر.

x_j : عدد الوحدات الواجب انتاجها (المراد معرفتها او استخراجها كأن تكون عدد مكائن، عدد شاحنات، كمية انتاج زراعي، عدد ايام تشغيل...) من السلعة j.

مثال (1):

تنتج شركة ثلاث انواع من المبردات حجم كبير ومتوسط وصغير ويبلغ هامش الربح لكل من الحجم الكبير (20) دينار والمتوسط (30) دينار والصغيرة (40) دينار ويمر كل نوع بثلاثة اقسام هي (A, B, C) وتحتاج كل وحدة من هذه الانواع الى عدد من الساعات في كل قسم وكما موضح في الجدول الاتي:

نوع / قسم	كبير	متوسط	صغير	وقت الانتاج (ساعة)
A	15	25	35	100
B	10	20	30	200
C	5	15	25	300

علماً ان حاجة السوق للانواع الثلاثة من المبردات هي كالاتي:

على الاقل 3000 مبردة من الحجم الكبير

على الاكثر 5000 مبردة من الحجم الوسط

وبمالايقل عن 4500 مبردة من الحجم الصغير

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة لتعظيم هامش الربح.

الحل:

نفرض ان المنتج الأول (المبردة حجم كبير) هو x_1

نفرض ان المنتج الثاني (المبردة حجم متوسط) هو x_2

نفرض ان المنتج الثالث (المبردة حجم صغير) هو x_3

$$Max\ z = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3$$

$$s.to$$

$$15x_1 + 25x_2 + 35x_3 \leq 100$$
$$10x_1 + 20x_2 + 30x_3 \leq 200$$
$$5x_1 + 15x_2 + 25x_3 \leq 300$$
$$x_1 \geq 3000$$
$$x_2 \leq 5000$$
$$x_3 \geq 4500$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مثال (2):

تقوم احدى الشركات بانتاج نوعين من الاسمدة (A,B) وان الشركة تحقق هامش ربح قدره (1000) دينار في الطن الواحد من النوع A و(1500) دينار للطن الواحد من النوع B. علماً ان الشركة تحتاج الى (20 ساعة) لانتاج طن واحد من النوع A و(30 ساعة) لانتاج طن واحد من النوع B. وان الوقت المتاح سنوياً للانتاج هو (1200) ساعة كما ان الطلبات على هذين المنتوجين لايزيد عن (40) طن من A سنوياً ولايزيد عن (30) طن من B سنوياً.

المطلوب: كتابة المشكلة بصيغة نموذج برمجة خطية لتحقيق اقصى هامش ربح ممكن.

الحل:

نفرض ان عدد الاطنان المنتجة والمبيعة من A هي x_1

نفرض ان عدد الاطنان المنتجة والمبيعة من B هي x_2

$$Max\ z = 1000x_1 + 1500x_2$$

$$s.to$$

$$20x_1 + 30x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

واجب (1):

يقوم مصنع لاطارات السيارات بانتاج تركيب مطاطي وذلك من خلط نوعين من المطاط A و B اذ يحتوي كل منهما على اربعة مكونات اساسية M_1, M_2, M_3, M_4 وبكميات مختلفة يوضحها الجدول الاتي مع التركيب المطاطي المطلوب للخليط.

انواع المطاط / المكونات الاساسية	المطاط A	المطاط B	التركيب المطلوب
M_1	---	0.45	1
M_2	0.5	0.3	3
M_3	0.35	---	1
M_4	0.15	0.2	1.5
كلفة الوحدة الواحدة	32	24	

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة لتقليل الكلفة.

واجب (2):

احد المعامل ومن اجل انتاج ثلاثة انواع من الاقمشة يستخدم ثلاثة انواع من الخيوط، فاذا كان احتياطي مستلزمات الانتاج المتاح من الخيوط معلوماً لدينا وكذلك معدلات مستلزمات الانتاج (احتياج الوحدة الواحدة من الانواع الثلاثة من الاقمشة من مستلزمات الانتاج، الخيوط) اللازمة لانتاج كل متر واحد من القماش معلومة ايضاً، وكذلك الربح الحاصل من تصريف وحدة انتاج واحدة كما في الجدول الاتي:

انواع الخيوط المستخدمة	احتياط كميات الخيوط (الف كغم)	كمية مستلزمات الانتاج اللازم لانتاج متر واحد		
		من النسيج الشتوي	من النسيج الربيعي	من النسيج الصيفي
خيوط صوفية	20	2	0.5	---
خيوط قطنية	40	0.5	2	3
خيوط صناعية	30	1	1.5	1
الربح الحاصل من تصريف انتاج متر واحد من النسيج (دينار)		0.5	0.4	0.25

المطلوب: تصميم نموذج البرمجة الخطية للمشكلة المقترحة بحيث نحصل على اعلى ربح ممكن من العملية الانتاجية اعلاه.

بحوث العمليات

قسم ادارة الاعمال

المرحلة الثالثة

الدراسة الصباحية/ المسائية

المحاضرة الرابعة

م.د.أسيل ناصر حسين

صياغة نموذج البرمجة الخطية

اولاً : الصيغة القانونية : Canonical from

لكتابة نموذج البرمجة الخطية بالصيغة القانونية يتوجب ما ياتي:

1- تكون دالة الهدف من نوع MAX

2- تكون القيود من النوع اقل او يساوي

3- تكون جميع المتغيرات موجبة

امثلة على ذلك:

1. اذا كانت دالة الهدف Min يتم تحويل الدالة الى Max بضربها في (-1)

$$Min\ z = x_1 + 3x_2$$
$$Max\ z = -x_1 - 3x_2$$

2. اذا كان القيد من النوع اكبر او يساوي يتم تحويله الى اقل اويساوي بضربه في (-1).

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 16$$
$$-x_1 - 4x_2 - x_3 \leq -16$$

3. اذا كانت القيد في حالة مساواة وأردنا تحويلة الى الصيغة القانونية فيحول القيد الى قيدين احدهما اقل او يساوي والاخر اكبر او يساوي .

$$x_1 + 5x_2 = 12$$
$$x_1 + 5x_2 \leq 12$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 12 \longrightarrow -x_1 - 5x_2 \leq -12$$

4. اذا كان المتغير غير مقيد باشارة Unrestricted in sign فانه يكتب بشكل حاصل طرح متغيرين احدهما باشارة موجبة والثاني باشارة سالبة كما في المثال الاتي :

$$Max\ z = 2x_1 + x_2$$
$$s.to$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$x_1 \geq 0 \quad , x_2\ \ Unrestricted\ in\ sign$$

الحل:

$$Max\ z = 2x_1 + (x_2^+ - x_2^-)$$
$$s.to$$
$$x_1 + (x_2^+ - x_2^-) \leq 10$$
$$x_1 + 3(x_2^+ - x_2^-) \leq 12$$
$$x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0$$

ثانياً : الصيغة القياسية : Standard from

من خصائص كتابة هذه الصيغة:

1. دالة الهدف تكون Max أو Min
2. جميع القيود في حالة مساواة ، فاذا كان القيد من النوع اقل او يساوي يضاف متغير وهمي (+S) وهو متغير (slack variable) يضاف الى طرف المعادلة الاصغر ويسمى ايضاً المتمم الرياضي ويعرف بالغة الانتاج بانه مقدار مستلزمات الانتاج غير المستغلة مثل

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \longrightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 15$$

اما اذا كان القيد من النوع اكبر او يساوي فيطرح منه متغير وهمي (-S) ويسمى بالمتغير الفائض (Surplus) ثم يضاف (R) المتغير الاصطناعي Artificial variable وهو ذلك المتغير الذي يستخدم بهدف معالجة الاشارة السالبة للمتغير الفائض (-S) وان وجوده في المشكلة هو فقط لاغراض رياضية بحتة وبالتحديد من اجل معالجة الاشارة السالبة للمتغير الفائض التي تتعارض مع قيد اللاسلبة ($S_i \geq 0$).

وبعد زيادة المتغير R لأي قيد يضاف الى دالة الهدف بمعامل (-M) اذا كانت من Max وبمعامل (+M) اذا كانت من النوع (Min) .

3. جميع المتغيرات موجبة $x_j \geq 0$
4. عنصر الطرف الايمن في القيود موجب $b_i \geq 0$

Example:

$$Max\ z = x_1 + x_2$$
$$s.to$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 10$$
$$4x_1 + 4x_2 \geq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

$$Max\ z = x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_2$$
$$s.to$$
$$x_1 + 3x_2 + S_1 = 10$$
$$4x_1 + 4x_2 - S_2 + R_2 = 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad , S_1, S_2 \geq 0 \quad , R_2 \geq 0$$

واجب(1): اكتب نموذج البرمجة الخطية الاتي بالصيغة القياسية؟

$$Max\ z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.to$$
$$x_1 + x_2 = 10$$
$$-2x_1 + 3x_2 \leq -5$$
$$7x_1 - 4x_2 \leq 6$$
$$x_1: Unrestricted\ in\ sign, \quad x_2 \geq 0$$

واجب(2): حول نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الهيكلية الى الصيغة القانونية؟

$$Min\ z = 3x_1 + x_2$$
$$s.to$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$2x_1 - x_2 = 3$$
$$x_1, \ x_2 \geq 0$$

واجب(3): اعط الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية الاتي ؟

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2$$
$$s.to$$
$$2x_1 + x_2 \leq 100$$
$$x_1 + x_2 \leq 80$$
$$x_1 \leq 40$$
$$x_1, \ x_2 \geq 0$$

طرائق حل نماذج البرمجة الخطية

بعد ان يتم صياغة النموذج الرياضي الخطي للمشكلة المدروسة ومن ثم التأكد من توفر كافة الافتراضات المشار اليها سابقاً نبدأ مرحلة حل النموذج الرياضي لاستخراج النتائج والحلول النهائية للمشكلة. وهذه الطرئق هي:

1. الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphical method
2. الطريقة الجبرية Algebraic method
3. الطريقة المبسطة السمبلكس Simplex method

- الطريقة البيانية (طريقة الرسم) **Graphical Method** تعتبر الطريقة البيانية من الطرق الاساسية في حل النموذج الرياضي للبرمجة الخطية التي لايزيد فيها عدد المتغيرات عن اثنين ولحل المشكلة يتم التعبير عن كل نشاط باحدى الاحداثيات وبعد ذلك يتم رسم القيود ومن ثم تحديد الامكانيات **feasible region** ثم يتم اختيار افضل نقطة في منطقة الامكانيات (منطقة الحل المقبول) لاختيار الحل الامثل وتعتبر هذه الطريقة من اسهل الطرائق والا انها غير كفؤة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية.

مثال : جد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاتية بطريقة الرسم البياني:

$$Max\ z = 9x_1 + 7x_2$$
$$s.to$$
$$10x_1 + 5x_2 \leq 50$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 36$$
$$4.5x_1 + 18x_2 \leq 81$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

نكتب القيد الاول في حالة المساواة

$$10x_1 + 5x_2 = 50$$

$$x_1 = 0\ , x_2 = \frac{50}{5} = 10 \ \rightarrow (0,10)$$

$$x_2 = 0\ , x_1 = \frac{50}{10} = 5 \ \ \rightarrow (5,0)$$

نكتب القيد الثاني في حالة المساواة

$$6x_1 + 6x_2 = 36$$

$$x_1 = 0\ , x_2 = \frac{36}{6} = 6 \ \ \rightarrow (0,6)$$

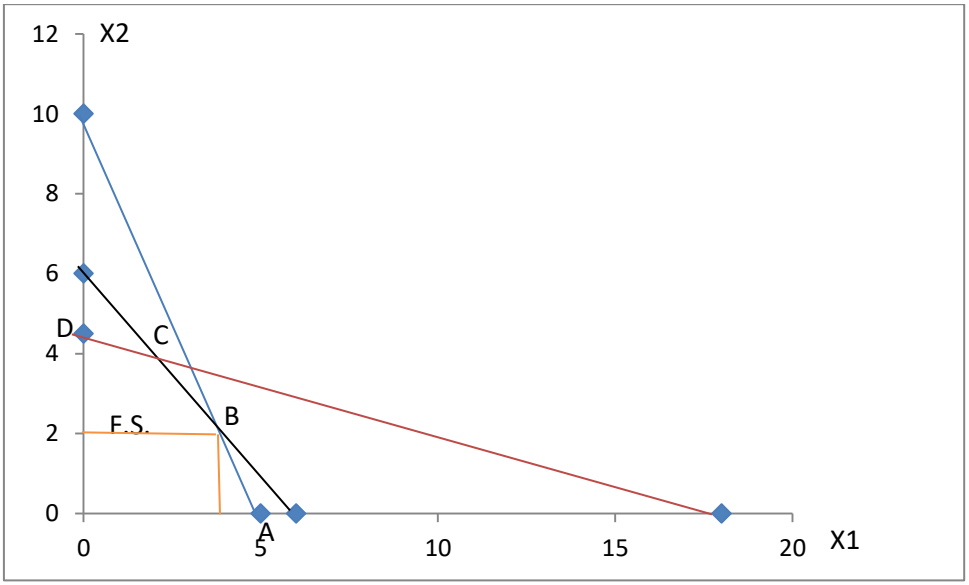
$$x_2 = 0\ , x_1 = \frac{36}{6} = 6 \ \ \rightarrow (6,0)$$

نكتب القيد الثالث في حالة المساواة

$$4.5x_1 + 18x_2 = 81$$

$$x_1 = 0\ , x_2 = \frac{81}{18} = 4.5 \ \ \rightarrow (0,4.5)$$

$$x_2 = 0\ , x_1 = \frac{81}{4.5} = 18 \ \ \rightarrow (18,0)$$



بما ان الدالة من النوع Max فان الحل الامثل ينتج بانزال عمود من اوطأ نقطة في منطقة التقاطع على المحورين السيني والصادي.

The optimal solution is $x_1 = 4,\ x_2 = 2$

$$z = 9x_1 + 7x_2$$
$$z = 9(4) + 7(2)$$
$$=50$$

واجب: اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي بطريقة الرسم.

$$Max\ z = 10x_1 + 12x_2$$
$$s.to$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 60$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 80$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

بحوث العمليات

قسم ادارة الاعمال

المرحلة الثالثة

الدراسة الصباحية/ المسائية

المحاضرة الخامسة

م.د.أسيل ناصر حسين

اسلوب السمبلكس لتخطيط الانتاج (اعلى الارباح)

طريقة السمبلكس وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة .

لقد طورت هذه الطريقة من قبل عالم الرياضيات الامريكي (E.dantzing) عام 1947 وتستنبط هذه الطريقة في مبدأها على الابتداء بحل معين ، كل ما يعرف عنه انه مقبول، ثم نستمر بأسلوب تكراري دوري في تطوير هذا الحل الى ان نحصل بعد عدد من الخطوات على الحل الامثل .

خطوات حل طريقة السمبلكس (Simplex method)

1- نكتب المسألة بالشكل القياسي
2- نضع المسألة في جدول
3- نطور الحل اي نحدد المتغير الداخل وهو متغير غير اساسي يناظر اكبر عدد سالب اذا كانت دالة الهدف Max والمتغير الخارج ينتج من قسمة عناصر عمود الحل (RHS) على معاملات المتغير الداخل ونختار اقل ناتج قسمة مع ملاحظة عدم القسمة على الصفر والكمية السالبة .
4- نكون جدول جديد نضع فيه المتغير الداخل بدل المتغير الخارج ثم نحدد نقطة المحوروهو عنصر تقاطع المتغير الداخل مع المتغير الخارج
5- لايجاد معادلة المحور نقسم عناصر الصف الذي فيه المحور على المحور نفسه.

اما لايجاد بقية قيم الصفوف الاخرى فنطبق المعادلة الاتية :

عنصر الصف القديم – (عنصر التقاطع * معادلة المحور)

6- نصل الى الحل الامثل عندما تكون $z - c_j \geq 0$ اذا كانت دالة الهدف Max

و $z - c_j \leq 0$ اذا كانت دالة الهدف Min

مثال1: حل مشكلة البرمجة الخطية الاتية باستخدام اسلوب الـ (Simplex method)

$$Max\ z = 8x_1 + 6x_2$$
$$s.to$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 60$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 48$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

نحول الى الصيغة القياسية

$$Max\ z = 8x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$s.to$$
$$4x_1 + 2x_2 + S_1 = 60$$
$$2x_1 + 4x_2 + S_2 = 48$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$S_1, S_2 \geq 0$$

B.V	x_1	x_2	S_1	S_2	Sol.
S_1	4	2	1	0	60
S_2	2	4	0	1	48
$z - c_j$	-8	-6	0	0	0
$* x_1$	1	1/2	1/4	0	15
S_2	0	3	-1/2	1	18
$z - c_j$	0	-2	2	0	120
x_1	1	0	1/3	-1/6	12
$* x_2$	0	1	-1/6	1/3	6
$z - c_j$	0	0	5/3	2/3	132

الحل:

1. المتغير الداخل: اكبر رقم في دالة الهدف (بغض النظر عن الاشارة) وهو x_1
2. المتغير الخارج: قسمة عمود الحل (sol.) على عنصر تقاطع المتغير الداخل.

$$\frac{60}{4} = 15 \quad , \frac{48}{2} = 24$$

3. نختار اقل ناتج قسمة ليكون المتغير الخارج (وهو S_1).
4. معادلة المحور ناتجة من قسمة صف الخارج على عنصر تقاطع الداخل مع الخارج وهو 4 (اي يتم قسمة جميع عناصر الصف الاول على 4)
5. لايجاد باقي العناصر يتم استخدام المعادلة

عنصر الصف القديم- (عنصر التقاطع* معادلة المحور)

مثلاً عناصر الصف القديم للمتغير S_2 هي:

2-(2*1) =0

4-(2*1/2) =3

0-(2*1/4) =-1/2

1-(2*0) =1

48-(2*15) =18

وبنفس الطريقة يتم حساب $z - c_j$

-8-(-8*1) =0

-6-(-8*1/2) =-2

0-(-8*1/4) =2

0-(-8*0) =0

0-(-8*15) =120

ونستمر في حساب الجدول الاخير بنفس الطريقة السابقة

بما $z - c_j \geq 0$ وان دالة الهدف من النوع Max فأن الحل امثل

وبالامكان التعويض عن قيم x_1 و x_2 في دالة الهدف للتحقق من ان الحل في الجدول صحيح

$\therefore z = 8x_1 + 6x_2$

=8(12) + 6(6)

=132

مثال2: حل مشكلة الخطية الاتية باستخدام اسلوب الـ (Simplex method)

$$Max\ z = 4x_1 + 14x_2$$
$$s.to$$
$$2x_1 + 7x_2 \leq 21$$
$$7x_1 + 2x_2 \leq 21$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

نحول الى الصيغة القياسية

$$Max\ z = 4x_1 + 14x_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$s.to$$
$$2x_1 + 7x_2 + S_1 = 21$$
$$7x_1 + 2x_2 + S_2 = 21$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$S_1, S_2 \geq 0$$

B.V	x_1	x_2	S_1	S_2	Sol.
S_1 S_2	2 7	7 2	1 0	0 1	21 21
$z - c_j$	-4	-14	0	0	0
$* x_2$ S_2	2/7 45/7	1 0	1/7 -2/7	0 1	3 15
$z - c_j$	0	0	2	0	42

بما $z - c_j \geq 0$ وان دالة الهدف من النوع Max فأن الحل امثل

وبالامكان التعويض عن قيم x_1 و x_2 في دالة الهدف للتحقق من ان الحل في الجدول صحيح

$$\therefore\ z = 4x_1 + 14x_2$$
$$= 4(0) + 14(3)$$
$$= 42$$

واجب:

س1: حل مشكلة الخطية الاتية باستخدام اسلوب الـ (Simplex method)

$$Max\ z = 50x_1 + 40x_2$$
$$s.to$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 150$$
$$10x_1 + 4x_2 \leq 200$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

س2: حل مشكلة الخطية الاتية باستخدام اسلوب الـ (Simplex method)

$$Max\ z = x_1 + 9x_2 + x_3$$
$$s.to$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

س3: حل مشكلة الخطية الاتية باستخدام اسلوب الـ (Simplex method)

$$Max\ z = 3x_1 + 5x_2$$
$$s.to$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

بحوث العمليات

المرحلة الثالثة

قسم ادارة الاعمال

المحاضرة السادسة

الدراسة الصباحية/ المسائية

م.د.أسيل ناصر حسين

إسلوب M-Technique او ما يسمى بأسلوب المتغيرات الاصطناعية Artificial variables Technique

يستخدم هذا الاسلوب لحل مسائل البرمجة الخطية ذات القيود من نوع اكبر او يساوي وحالة المساواة ايضاً اما خطوات حل هذا الاسلوب فهي :

1. نكتب المسألة بالشكل القياسي
2. نضيف الى القيود من النوع اكبر او يساوي وحالة المساواة متغيرات اصطناعية يرمز لها بالرمز R_i حيث $R_i \geq 0$ (متغير موجب) ثم نضيف هذه المتغيرات الى الدالة الهدف بمعاملات (M–) اذا كانت دالة الهدف Max ومعاملات (M+) اذا كانت دالة الهدف Min.
3. نضرب معاملات المتغيرات الاساسية في قيم المتغيرات وجمعها بشكل عمودي لايجاد قيم معاملات دالة الهدف $Z - C_j$ الجديدة.
4. المتغير الداخل هو اكبر سالب مرافق ل M في حالة دالة الهدف Max واكبر موجب مرافق لـ M في حالة دالة الهدف Min.
5. نصل الى الحل الامثل عندما تكون معاملات M جميعهما موجبة في حالة Max وتكون معاملات M جميعهما سالبة في حالة Min.

مثال1: حل مشكلة البرمجة الخطية الاتية:

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
$$s.to$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

$$Max\ z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0S_1 + 0S_2 - MR_2$$
$$s.to$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - S_2 + R_2 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad , R_2 \geq 0 \quad , S_1, S_2 \geq 0$$

B.V	x_1	x_2	x_3	S_2	S_1	R_2	Sol.
(0) S_1	2	1	1	0	1	0	2
(−M) R_2	3	4	2	-1	0	1	8
$z - c_j$	-3	-2	-3	0	0	M	0
$z - c_j$	-3M-3	-4M-2	-2M-3	M	0	0	-8M
* x_2	2	1	1	0	1	0	2
R_2	-5	0	-2	-1	-4	1	0
$z - c_j$	5M+1	0	2M-1	M	4M+2	0	4

الحل:

1. نوجد $Z - C_j$ الجديدة

0*(2)+(-M*3)-3=-3M-3
0*(1)+(-M*4)-2=-4M-2
0*(1)+(-M*2)-3=-2M-3
0*(0)+(-M*-1)+0=M
0*(1)+(-M*0)+0=0
0*(0)+(-M*1)+M=0
0*(2)+(-M*8)+0 =-8M

2. المتغير الداخل: اكبر رقم سالب مرافق ل M لان دالة الهدف (Max) وهو x_2.
3. المتغير الخارج: قسمة عمود الحل (sol.) على عنصر تقاطع المتغير الداخل.

$$\frac{2}{1} = 2 \quad , \frac{8}{4} = 2$$

4. نختار اقل ناتج قسمة (هنا يمكن اختيار اي متغير) ليكون المتغير الخارج (هو S_1).

5. معادلة المحور ناتجة من قسمة صف الخارج على عنصر تقاطع الداخل مع الخارج وهو 1 (اي تبقى جميع عناصر الصف كما هي)
6. لايجاد باقي العناصر يتم استخدام المعادلة

عنصر الصف القديم- (عنصر التقاطع* معادلة المحور)

مثلاً عناصر الصف القديم للمتغير R_2 هي:

3-(4*2) =-5
4-(4*1) =0
2-(4*1) =-2
-1-(4*0) =-1
0-(4*1) =-4
1-(4*0) =1
8-(4*2) =0

وبنفس الطريقة يتم حساب $z - c_j$

-3M-3-((-4M-2)*2) =5M+1
-4M-2-((-4M-2)*1) =0
-2M-3-((-4M-2)*1) =2M-1
M-((-4M-2)*0) =M
0-((-4M-2)*1) =4M+2
0-((-4M-2)*0) =0
-8M-((-4M-2)*2) =4

نتوقف عن الحل لان معاملات M جميعها موجبة (دالة الهدف من النوع $(Max$
اذن الحل امثل
وبالامكان التعويض عن قيم x_1 و x_2 في دالة الهدف للتحقق من ان الحل في الجدول صحيح

$\therefore\ z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0S_1 + 0S_2 - MR_2$
=3(0) + 2(2)+3(0)
=4

مثال2: حل مشكلة البرمجة الخطية الاتية:

$$Min\ z = 6x_1 + 8x_2$$
$$s.to$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 20$$
$$8x_1 + 5x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

$$Min\ z = 6x_1 + 8x_2 + 0S_1 + MR_1 + 0S_2$$
$$s.to$$
$$2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 20$$
$$8x_1 + 5x_2 + S_2 = 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad , R_1 \geq 0 \quad , S_1, S_2 \geq 0$$

B.V	x_1	x_2	S_1	R_1	S_2	Sol.
(M) R_1	2	4	-1	1	0	20
(0) S_2	8	5	0	0	1	40
$z - c_j$	-6	-8	0	-M	0	0
$z - c_j$	-6+2M	-8+4M	-M	0	0	20M
* x_2	2/4	1	-1/4	1/4	0	5
S_2	11/2	0	5/4	-5/4	1	15
$z - c_j$	-2	0	-2	2-M	0	40

بما ان معاملات M جميعها سالبة (دالة الهدف من النوع $(Min$ اذن الحل امثل وبالامكان التعويض عن قيم x_1 و x_2 في دالة الهدف للتحقق من ان الحل في الجدول صحيح

$$\therefore\ z = 6x_1 + 8x_2$$
$$=6(0) + 8(5)$$
$$=40$$

واجب: حل مشكلة البرمجة الخطية الاتية:

$$Max\ z = -2x_1 + 3x_2$$
$$s.to$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 = 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

بحوث العمليات

المرحلة الثالثة

قسم ادارة الاعمال

المحاضرة السابعة

الدراسة الصباحية/ المسائية

م.د.أسيل ناصر حسين

المشكلة الثنائية : The dual Problem

ان كل مسألة في البرمجة الخطية لها مسألة متعلقة بها، المسألة الاولى تسمى مسألة اولية Primed Problem والمسألة الثانية تسمى بالثنائية أوالمقابلة Dual Problem

ان السبب في صياغة النموذج الثنائي وحله يكمن في ان حل النموذج الاول او الثنائي يمكن ان يوصلنا الى الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية ويحقق المزايا الاتية :

1- بعض الاحيان يكون حل النموذج الثنائي اسهل من النموذج الاولي .
2- استخدام النموذج الثنائي لاجراء تحليل الحساسية
3- يقدم النموذج الثنائي تفسيراً اقتصادياً لمشكلات البرمجة الخطية.
4- يعد النموذج الثنائي الاساس في حل المشكلات البرمجة المتكاملة وشبكات النقل.

خطوات تحويل النموذج الاولي (النموذج القانوني) الى نموذج ثنائي وبالعكس

1- اذا كانت دالة الهدف Max في الاولية تصبح Min في الثنائية والعكس صحيح.
2- اذا كانت دالة الهدف Max فأن القيود يجب ان تكتب بشكل اقل او يساوي واذا كانت دالة الهدف Min فان القيد يجب ان تكون اكبراو يساوي
3- ان كل قيد في المسألة الاولة يقابله متغير واحد في المسألة الثنائية يرمز له y_i حيث $i=1,2,...,n$ ، اي ان عدد المتغيرات الثنائية يساوي عدد قيود الاولية وعدد قيود الثنائية يساوي عدد المتغيرات الاولية .
4- جميع المتغيرات ولكلا المسألتين ذات قيم موجبة.
5- عناصر الطرف الايمن للقيود (b_i) في الاولية تصبح معاملات دالة الهدف في الثنائية والعكس صحيح.
6- ان كل قيد مساواة في الأولية يقابله متغير غير مقيد بأشارة بالمسألة الثنائية والعكس صحيح.

مثال(1): حول نموذج البرمجة الخطية القانوني الاتي الى النموذج الثنائي

$$Max\ z = 20x_1 + 10x_2$$
$$s.to$$
$$5x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 13$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Canonical From

$$Min\ y = 24y_1 + 13y_2$$
$$s.to$$
$$5y_1 + 2y_2 \geq 20$$
$$4y_1 + 5y_2 \geq 10$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

مثال (2):

$$Max\ z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$s.to$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 10$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 16$$
$$x_2 + 14x_3 \leq 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$Min\ y = 10y_1 + 16y_2 + 20y_3$$
$$s.to$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 3$$
$$y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 4$$
$$4y_1 + y_2 + 14y_3 \geq 3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

مثال (3):

$$Max\ z = x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$s.to$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 4$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل: نحول المسألة الى الصيغة القانونية لوجود قيد من النوع اكبر او يساوي

$$Max\ z = x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$s.to$$
$$-x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq -4$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$Min\ y = -4y_1 + 10y_2$$
$$s.to$$
$$-y_1 + 2y_2 \geq 1$$
$$-4y_1 + 3y_2 \geq 3$$
$$-3y_1 + 4y_3 \geq 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

مثال (4):

$$Max\ z = x_1 + x_2$$
$$s.to$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل: نجانس القيود

$$Max\ z = x_1 + x_2$$
$$s.to$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$-x_1 - 2x_2 \leq -1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$Min\ y = 6y_1 + 4(\acute{y_2} - \acute{y_2}) - y_3$$
$$s.to$$
$$3y_1 + (\acute{y_2} - \acute{y_2}) - y_3 \geq 1$$
$$y_1 - (\acute{y_2} - \acute{y_2}) - 2y_3 \geq 1$$
$$y_1 + (\acute{y_2} - \acute{y_2}) \geq 0$$
$$y_1, y_3 \geq 0$$

y_2 (غيرمقيد بأشارة) $unrestricted\ in\ sign$

مثال (5):

$$Max\ z = x_1 + x_2$$
$$s.to$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 - x_2 = 6$$
$$x_1, x_2\ unrestricted\ in\ sign$$

الحل:

$$Min\ y = 5y_1 + 6y_2$$
$$s.to$$
$$2y_1 + 3y_2 = 1$$
$$y_1 - y_2 = 1$$
$$y_1, y_2\ unrestricted\ in\ sign$$

مثال(واجب):

اوجد الحل الامثل بطريقة السمبلكس للنموذج القانوني الاتي بعد تحويله الى النموذج الثنائي ثم جد حل النموذج بطريقة السمبلكس وقارن بين نتائج الحالتين:

$$Max\ z = 20x_1 + 10x_2$$
$$s.to$$
$$5x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 13$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

بحوث العمليات

المرحلة الثالثة

قسم ادارة الاعمال

المحاضرة الثامنة

الدراسة الصباحية/ المسائية

م.د.أسيل ناصر حسين

نماذج النقل Transportation Models

شروط استخدام نماذج النقل وضوابط بناء مصفوفة النقل

إن مشكلة النقل من التطبيقات المهمة لنموذج البرمجة الخطية وان الهدف من دراستها هو تقليل دالة كلفة النقل عندما يراد نقل بضاعة معينة من مصادر العرض (Sources) الى عدد من محطات الطلب او مركز الاستهلاك (Destination) بحيث تكون الكميات المعروضة عند كل منشأ والمطلوبة من قبل من كل موقع وكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر الى الموقع جميعها معلومة.

اما جدول النقل فيكون بالشكل الاتي :

المصادر Sources		المواقع Destination				العرض Supply
	1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	⋯ ⋯	C_{1n} x_{1n}	S_1
	2	C_{21} x_{12}	C_{22} x_{22}	⋯ ⋯	C_{2n} x_{2n}	S_2
	⋮	⋮	⋮	⋯ ⋯	⋮	⋮
	m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	⋯ ⋯	C_{mn} x_{mn}	S_m
		d_1	d_2		d_n	

الطلب Demand

وتشهد نماذج النقل والتخصيص (Assignment Problem) تطبيقات واسعة في مجالات متعددة مثل جدولة الاعمال، التخطيط الاجمالي للانتاج، توزيع المنتجات، تخصيص نشاطات الصيانة واختيار موقع المصنع. وتنطوي مشكلة النقل الاساسية بأبسط صورها على الافتراضيات الاتية:

1. ان جميع المواد المنقولة بين المصادر ومناطق الطلب متجانسة Homogeneous
2. عدم وجود عوائق للنقل بين اي مصدر للجهيز واي موقع للطلب.
3. ان مجموعة كمية المواد المتوافرة لدى المصادر يساوي مجموعة كمية الطلب في المواقع.
4. ان تكاليف نقل المواد بين اي مصدر واي موقع للطلب معروفة ولن تتغير في الامد القريب.

5. ان كلفة النقل بين اي مصدر واي موقع لاتتغير بتغير كمية المواد المنقولة.
6. ان هدف مشكلة النقل هو تخفيض تكاليف النقل الكلية بين مصادر التجهيز ومناطق الطلب والاستهلاك.

بما ان نموذج النقل هو نموذج برمجة خطية اذن يمكن نموذج النقل بالشكل الاتي:

$$Min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

$$s.to$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \mathrm{S_i} \qquad Where, i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad Where, j = 1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

حيث ان:

n: عدد المواقع $j=1,2,\dots,n$

m: عدد المصادر $i=1,2,\dots,m$

s_i: عدد الوحدات المعروضة عند المصدر i

d_j: عدد الوحدات المطلوبة للموقع j

C_{ij}: كلفة نقل الوحدة الواحدة من الضاعة من المصدر i الى الموقع j

x_{ij} : عدد الوحدات التي ستنقل من المصدر i الى الموقع j

ملاحظة:

عدد الخلايا $m.n$

عدد المتغيرات الاساسية (الخلايا الملؤة) $\mathrm{m+n-1}$

عدد المتغيرات غير الاساسية $\mathrm{mn-(m+n-1)}$

لحل مسألة البرمجة الخطية يجب ان تكون المشكلة متوازنة اي ان مجموع الكميات المطلوبة يساوي مجموع الكميات المعروضة.

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

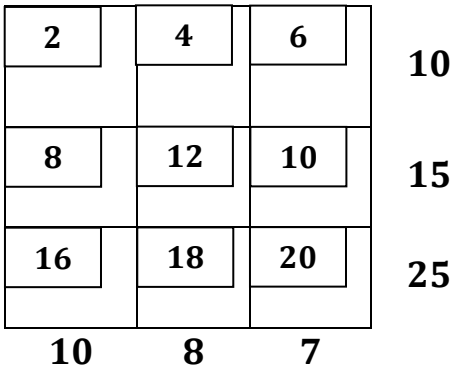
اما اذا كانت مشكلة النقل غير متوازنة يكون لدينا حالتان:

$$1\text{-}\ \sum_{i=1}^{m} S_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$$

اي ان مجموع العروض اكبرمن مجموع الطلب وفي هذه الحالة نضيف موقع وهمي (عمود) قيمة الطلب فيه

$$\sum_{i=1}^{m} S_i - \sum_{j=1}^{n} d_j$$

وكلفة النقل فيه تساوي صفر وكما في المثال الاتي:



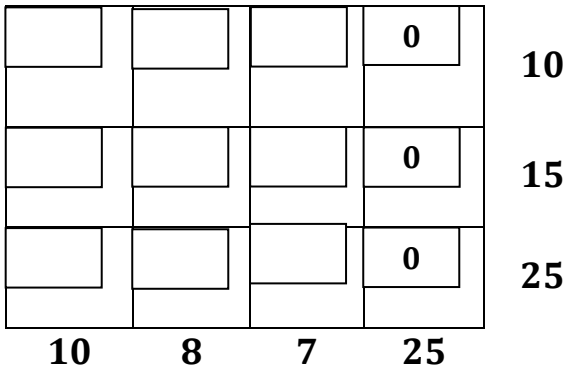
الحل:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 10 + 15 + 25$$
$$=50$$
$$\sum_{j=1}^{3} d_j = 10 + 8 + 7$$
$$=25$$

$$\because \sum_{i=1}^{m} S_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$$

$\therefore$ نضيف موقع وهمي (عمود) وقيمته تساوي

$$\sum_{i=1}^{3} S_i - \sum_{j=1}^{3} d_j = 50 - 25$$
$$=25$$



2- $\sum_{j=1}^{n} d_j > \sum_{i=1}^{m} S_i$

اي ان مجموع الطلب اكبرمن مجموع العرض وفي هذه الحالة نضيف صف وهمي قيمة الطلب فيه

$$\sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} S_i$$

وكلفة النقل فيه تساوي صفر وكما في المثال الاتي:

1	2	3	5
4	9	6	10
8	5	3	15
15	30	20	

الحل:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 5 + 10 + 15$$
$$=30$$
$$\sum_{j=1}^{3} d_j = 15 + 30 + 20$$
$$=65$$

$$\because \sum_{j=1}^{3} d_j > \sum_{i=1}^{3} S_i$$

$\therefore$ نضيف صف وهمي وقيمته تساوي:

$$\sum_{j=1}^{3} d_j - \sum_{i=1}^{3} S_i = 65 - 30$$
$$=35$$

			5
			10
			15
0	0	0	35
15	30	20	

طرق حل نماذج النقل

1- طريقة الركن الشمالي الغربي North-west corner method

تتلخص خطوات هذه الطريقة بمايأتي:

1- نبدأ بالخلية الواقعة في شمال غرب الجدول ونقارن العرض مع الطلب المناظر بهذه الخلية اي نقارن d_1 مع S_1 فتظهر لنا الحالات الثلاث:

أ. اذا كانت $d_1 < S_1$ نضع $x_{11} = d_1$ ثم ننتقل افقياً الى الخلية X_{12}.

ب. اذا كانت $d_1 > S_1$ نضع $x_{11} = S_1$ ثم ننتقل عمودياً الى الخلية X_{21}.

ج. اذا كانت $d_1 = S_1$ نضع $x_{11} = S_1$ او $x_{11} = d_1$ ثم ننتقل قطرياً الى الخلية X_{22}.

2- نستمر بهذه المقارنة بحيث في كل خطوة يتحقق احد قيود النموذج بشكل متعاقب مبتعدين عن الزاوية الشمالية الغربية للجدول حتى نصل في النهاية الى الخلية الواقعة في جنوب شرق الجدول وعندما تكون جميع قيود النموذج قد تحققت.

مثال(1)/ استخراج الحل الاساسي الابتدائي المقبول لنموذج النقل الاتي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.

20	1	10	12	15
4	5	7	8	10
3	2	6	4	5
12	20	18	50	30
7	8	25	20	

الحل:

$$\sum_{i=1}^{4} S_i = 15 + 10 + 5 + 30$$
$$= 60$$
$$\sum_{j=1}^{4} d_j = 7 + 8 + 25 + 20$$
$$= 60$$

∴ المشكلة متوازنة

20	1	10	12	~~15~~ 8
7	8			
4	5	7	8	10
		10		
3	2	6	4	5
		5		
12	20	18	50	30
		10	20	
7	8	~~25~~ 15	20	

$$x_{11} = 7,\ x_{12} = 8, x_{23} = 10, x_{33} = 5\ ,\ x_{43} = 10,\ x_{54} = 20$$

$$Min\ Z\ = 20(7) + 1(8) + 7(10) + 6(5) + 18(10) + 50(20)$$
$$= 1428$$

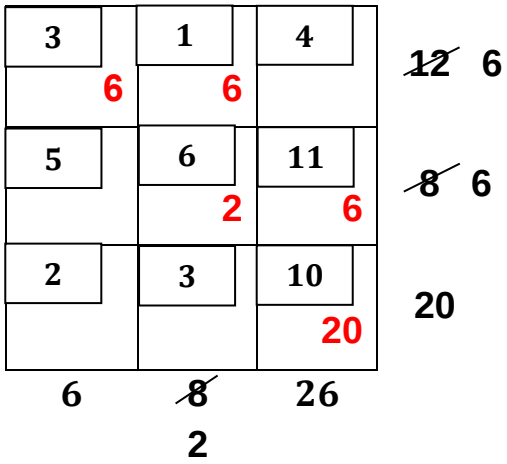
مثال(2)/ استخراج الحل الاساسي الابتدائي المقبول لنموذج النقل الاتي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.

3	1	4	12
5	6	11	8
2	3	10	20
6	8	26	

الحل:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 12 + 8 + 20$$
$$=40$$
$$\sum_{j=1}^{3} d_j = 6 + 8 + 26$$
$$=40$$

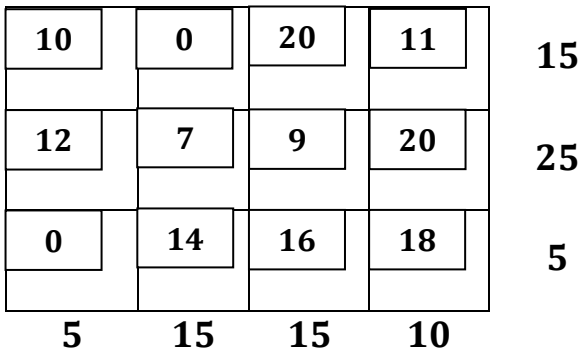
∴ المشكلة متوازنة



$$x_{11} = 6,\ x_{12} = 6,\quad x_{22} = 2,\ x_{23} = 6\,,\ x_{33} = 20$$

$$Min\ Z = 3(6) + 1(6) + 6(2) + 11(6) + 10(20)$$
$$= 302$$

واجب/ استخراج الحل الاساسي الابتدائي المقبول لنموذج النقل الاتي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.



بحوث العمليات

المرحلة الثالثة

قسم ادارة الاعمال

المحاضرة التاسعة

الدراسة الصباحية/ المسائية

م.د.أسيل ناصر حسين

طريقة أقل تكلفة : Least Cost Method

في هذه الطريقة يتم توزيع الكميات المعروضة على المطلوبة حسب أقل كلفة ممكنة، اما خطوات هذه الطريقة فهي:

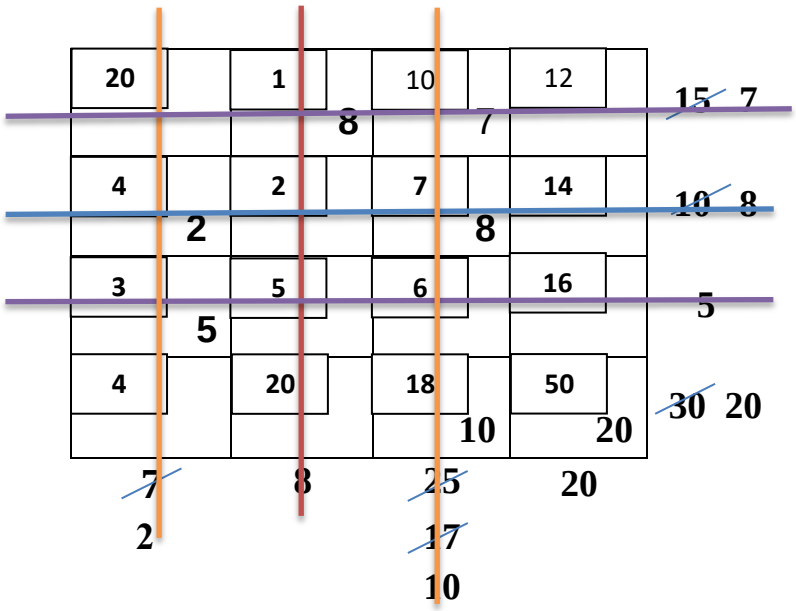
1- يتم اختيار خلية ذات اقل تكلفة نقل في جدول التكاليف.
2- يتم تخصيص قيمة للمتغير داخل هذه الخلية وذلك بمقارنة الطلب مع العرض المناظر لتلك الخلية.
3- يتم حذف الصف او العمود الذي يتحقق، ثم نبحث عن خلية اقل تكلفة.
4- نكرر جميع الخطوات السابقة حتى يتم حذف جميع الصفوف والاعمدة اي ان قيود النموذج جميعها تحققت.

مثال: استخراج الحل الاساسي الابتدائي المقبول لنموذج النقل الاتي حسب طريقة اقل كلفة ممكنة.

20	1	10	12	15
4	2	7	14	10
3	5	6	16	5
4	20	18	50	30
7	8	25	20	

Sol:

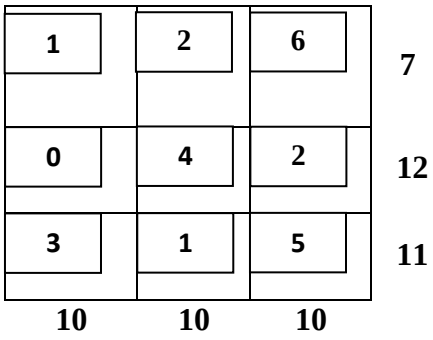
$$\sum_{i=1}^{4} S_i = 15 + 10 + 5 + 30$$
$$=60$$
$$\sum_{j=1}^{4} d_j = 7 + 8 + 25 + 20$$
$$=60$$



$$x_{12} = 8, \qquad x_{13} = 7,\ x_{21} = 2,$$
$$x_{23} = 8, x_{31} = 5,\ x_{43} = 10, \qquad x_{44} = 20$$

$$Min\ Z = 1(8) + 10(7) + 4(2) + 7(8) + 18(10) + 50(20)$$
$$= 1337$$

واجب/ استخراج الحل الاساسي الابتدائي المقبول لنموذج النقل الاتي حسب طريقة اقل كلفة ممكنة.



3- طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method

تعتبرطريقة فوجل افضل من الطريقيتين الاولى والثانية (طريقة الركن الشمالي الغربي وطريقة اقل كلفة ممكنة) لما تتميز به هذه الطريقة من ميزات تمكننا من الحصول على الحل الامثل لنموذج النقل بصورة مباشرة اوبعد تطبيق عدد صغير جداً من الدورات الخاصة بالحسابات التكرارية.

وتتخلص خطوات هذه الطريقة بما يأتي :

1- نجد الفرق بين اقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود، ويسمى هذا الفرق بكلفة الجزاء (Penalty Cost).
2- يتم اختيار الصف او العمود الذي يناظر اكبر كلفة جزاء
3- يتم تحديد خلية ذات اقل كلفة في الصف او العمود الذي يتم اختياره في الخطوة السابقة.
4- يتم تخصيص قيمة للمتغير في هذه الخلية بمقارنة الطلب مع العرض المناظرة له.
5- يتم حذف الصف او العمود الذي يتحقق.
6- نكرر جميع الخطوات السابقة حتى يتم حذف جميع الصفوف وجميع الاعمدة اي ان قيود نموذج النقل قد تحققت.

ملاحظة: في حالة تساوي كلف الجزاء فأننا نختار الصف او العمود ذا كلف النقل الاقل، وكذلك فأن طريقة فوجل تعطي حل امثل او قريب من الامثل.

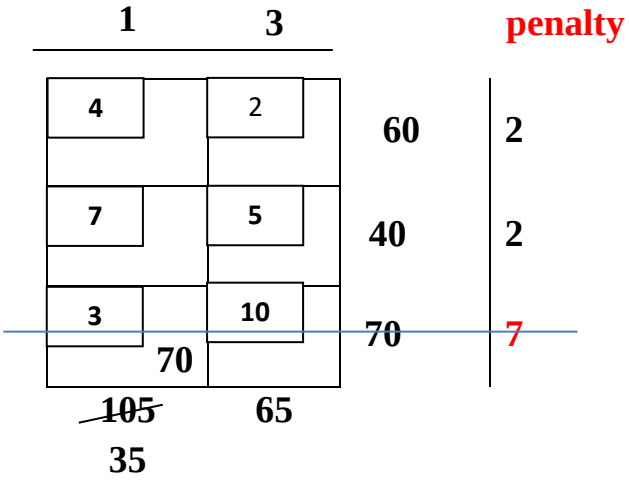
مثال: اوجد الحل الاساسي الابتدائي لطريقة فوجل التقريبية:

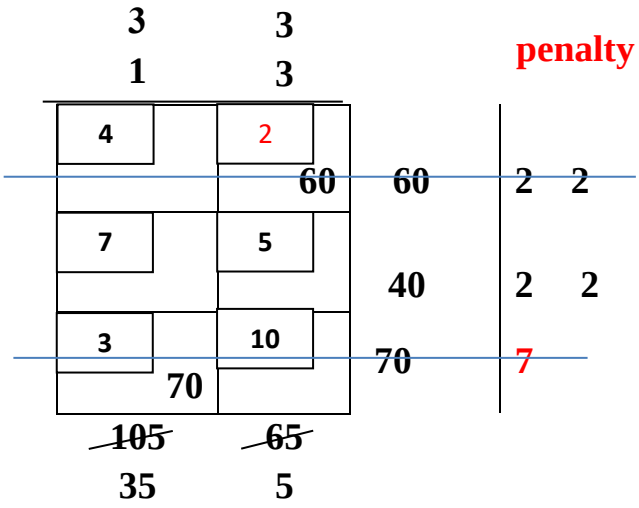
4	2	60
7	5	40
3	10	70
105	65	

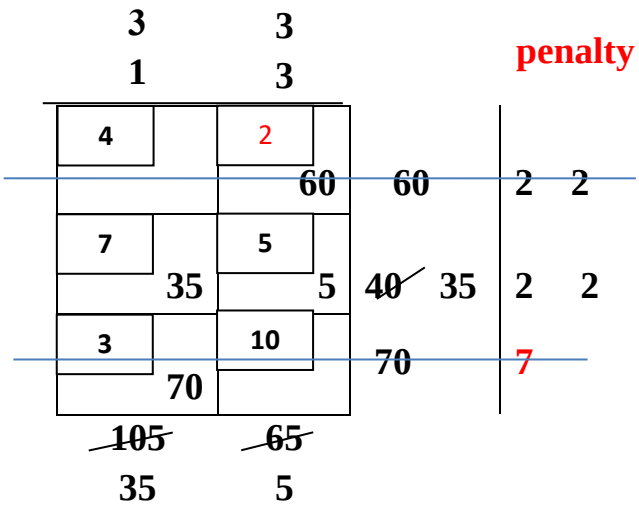
الحل:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 60 + 40 + 70$$
$$=170$$
$$\sum_{j=1}^{2} d_j = 105 + 65$$
$$=170$$

∴ المشكلة متوازنة







عدد الخلايا المشغولة $m + n - 1 = 3 + 2 - 1$

$= 4$

$x_{12} = 60, \quad x_{21} = 35, \quad x_{22} = 5, \quad x_{31} = 70$

$Min\ Z = 60(2) + 7(35) + 5(5) + 3(70)$

$= 600$

واجب/ استخراج الحل الاساسي الابتدائي المقبول لنموذج النقل الاتي باستخدام طريقة فوجل التقريبية.

20	22	17	4	120
24	37	9	7	70
32	37	20	15	50
4	40	30	110	

بحوث العمليات

المرحلة الثالثة

قسم ادارة الاعمال

المحاضرة العاشرة

الدراسة الصباحية/ المسائية

م.د.أسيل ناصر حسين

طريقة التخصيص : Assignment Problem

تعتبر مشكلة التخصيص من المشاكل الخاصة لمشكلة النقل وتنشأ هذة الحالة عندما تكون هناك مجموعة من الوظائف او الاعمال المراد توزيعها على المكائن او الافراد بالشكل الذي يحقق اقل كلفة او اقل وقت او يعطي اكبر عائد ممكن، ويشترط في عملية التخصيص تساوي عدد الاعمدة او المهام Tasks مع عدد المكائن او الافراد Facilities بحيث يخصص كل ماكنة او فرد لانجاز مهمة واحدة فقط وكل عمل أووظيفة تنجز من قبل ماكنة او عامل واحد فقط ويعتبر كل من P.S. Dwyer و M.M. Flood و A.W. Kuha من المساهمين الاوائل في تطوير اساليب مشكلة النقل.

و تتألف صياغة المشكلة من اربع عناصر اساسية وهي:

1- يجب ان يكون عدد الوظائف او الاعمال مساوي لعدد العمال فأذا كان لدينا m من الوظائف او الاعمال يجب ان يكون لدينا m من العمال الذين يمكن ان تسند اليهم هذه الوظائف.
2- باستطاعة كل عامل من العمال القيام بأي عمل من الاعمال او الوظائف بتكلفة معينة اوربح معين وان هذه الاختلافات في التكلفة او العمل ناتج عن الاختلاف في كفاءة العاملين، فلو كانت كفاءة العاملين متساوية فلن تكون هناك ايه مشكلة في التخصيص.
3- عدم امكانية العامل الواحد بالقيام باكثر من عمل واحد او وظيفة واحدة (اي لا يمكن اعطاء العامل اكثر من عمل واحد) وهذا هو جوهر الاختلاف بين مشكلة التخصيص ومشكلة النقل.
4- مع الاحتفاظ بشرط عدم السالبية Nonnegative بالنسبة للمتغيرات الموجودة في في المشكلة فأن الهدف الوصول الى ادنى التكاليف او الوقت او اقصى الايرادات ولايمكن ان يكون هناك عدد من الوظائف او الاعمال او العمال بالسالب.

طرائق حل مشكلة التخصيص

1- طريقة التوافيق المختلفة Different Combination Method

عند استخدام هذه الطريقة نقوم بحساب جميع احتمالات توزيع العمال Workers على الوظائف Jobs ومن ثم مقارنة النتائج لجميع التوزيعات المختلفة، وكما في المثال الاتي:

مثـال: اوجـد التخصـيص الأمثـل الـذي يحقـق تنفيـذ الوظـائف بأقـل وقـت ممكـن باسـتخدام طريقة التوافيق المختلفة.

الوظائف / العمال	A	B	C
1	90	50	80
2	60	30	50
3	50	20	60

حيث ان $m = 3,\ m! = 3! = 3 * 2 * 1 = 6$

اذاً هنالك (6) احتمالات يمكن كتابتها بالشكل الاتي:

الوظائف / الأحتمالات	A	B	C	Cost
1	1	2	3	90+30+60=180
2	1	3	2	90+20+50=160
3	2	1	3	60+50+60=170
4	2	3	1	60+20+80=160
5	3	1	2	50+50+50=150
6	3	2	1	50+30+80=160

يلاحظ من الجدول اعلاه ان الاحتمال الخامس هو الافضل لانه يعطي اقل التكاليف لانجاز الاعمال من قبل العاملين الثلاث

العامل الاول يخصص للعمل B=50

العامل الثاني يخصص للعمل C=50

العامل الثالث يخصص للعمل A=50

مجموع التكاليف 150

ملاحظة:

ان العيب في هذه الطريقة هو ان عدد الحلول الاحتمالية يتصاعد بشكل كبير جداً كلما زاد عدد الاعمال وعدد الوظائف وفقاً لقواعد التوافق حيث ان

M= 5 M! = 5! =120

M= 10 M! = 10! = 3628800

وهذا يتطلب وقت وجهد كبير للوصول للحل الامثل وبالتالي تصبح هذه الطريقة غير عملية في حل المشاكل ذات العلاقة بالتخصيص اذا كانت المصفوفات كبيرة.

2- الطريقة المجرية(الهنكارية) أوخوارزمية جونسون

Hungarian method or Johnson's algorithm

تعتمد هذه الطريقة على حقيقة انه اذا اضيف او طرح رقم ثابت الى او من اي صف او عمود من صفوف او اعمدة مصفوفة التكاليف سيبقى الحل الامثل كماهو ويتحقق ذلك باتباع الخطوات الاتية:

1- نطرح اصغر رقم في كل صف من قيم ذلك الصف فنحصل على مصفوفة التكاليف المعدلة من تخصيص هذا الصف لاي من اعمدة المصفوفة.

2- نطرح اصغر رقم من كل عمود لايحتوي على اصفار فنحصل على مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية من تخصيص هذا العمود لاي من صفوف المصفوفة.

3- نختبر الحل لمصفوفة تكلفة الفرصة الكلية عن طريق رسم اقل مايمكن من الخطوط المستقيمة التي تغطي جميع العناصر الصفرية. فاذا كان عدد الخطوط التي تغطي اصفار المصفوفة اقل من عدد صفوفها او اعمدتها، نختار ادنى رقم بالمصفوفة لم يغطه اي من هذه الخطوط ، ويطرح من كل رقم بالمصفوفة ويضاف الى كل رقم بالمصفوفة يقع عند ملتقى خطين افقي وراسي ونترك بقية الارقام كما هي.

مثال(1): اوجد التخصيص للمثال السابق الذي يحقق الحل الامثل باستخدام الطريقة الهنكارية.

الوظائف / العمال	A	B	C
1	90	50	80
2	60	30	50
3	50	20	60

الحل:

1- نطرح اصغر رقم في كل صف من قيم ذلك الصف فنحصل على مصفوفة التكاليف المعدلة.

الوظائف / العمال	A	B	C	
1	90	50	80	$P_1=50$
2	60	30	50	$P_2=30$
3	50	20	60	$P_3=20$

الوظائف / العمال	A	B	C
1	40	0	30
2	30	0	20
3	30	0	40

2- نطرح اصغر رقم من كل عمود لايحتوي على اصفار فنحصل على مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية.

الوظائف / العمال	A	B	C
1	40	0	30
2	30	0	20
3	30	0	40
	$q_1=30$		$q_3=20$

الوظائف / العمال	A	B	C
1	10	0	10
2	0	0	0
3	0	0	20

طالما اصبح في المصفوفة اعلاه على الاقل zero في كل الصفوف وفي كل عمود لذلك نختبر الحل بطريقة رسم اقل ما يمكن من الخطوط المستقيمة التي تمر بالعنصر الصفرية، بما ان عدد الخطوط التي تمر بالاصفار 3 وتساوي عدد الصفوف او الاعمدة، اذن الحل امثل ويمكن التخصيص كمايأتي:

العامل الاول يخصص للعمل B=50

العامل الثاني يخصص للعمل C=50

العامل الثالث يخصص للعمل A=50

مجموع التكاليف 150

مثال(2): اوجد التخصيص للمثال السابق الذي يحقق الحل الامثل باستخدام الطريقة الهنكارية.

الوظائف / العمال	A	B	C
1	5	7	9
2	14	10	12
3	15	13	16

الحل:

1- نطرح اصغر رقم في كل صف من قيم ذلك الصف فنحصل على مصفوفة الكلفة المعدلة.

الوظائف / العمال	A	B	C	
1	5	7	9	$P_1=5$
2	14	10	12	$P_2=10$
3	15	13	16	$P_3=13$

الوظائف / العمال	A	B	C
1	0	2	4
2	4	0	2
3	2	0	3

2- نطرح اقل قيمة من كل عمود لايحتوي على اصفار فنحصل على مصفوفة التكلفة الكلية.

الوظائف / العمال	A	B	C
1	0	2	4
2	4	0	2
3	2	0	3
			$q_3=2$

العمال \ الوظائف	A	B	C
1	0	2	2
2	4	0	0
3	2	0	1

طالما امكن تغطية جميع الاصفار بعدد من المستقيمات اكبر او مساوي لعدد الصفوف او الاعمدة فذلك يعني ان هناك حل امثل Optimal solution، حيث تعطي الاولوية للصف الذي يوجد فيه صفر واحد فقط ويمكن التخصيص كما موضح في الجدول الاتي :

العامل الاول يخصص للعمل A=5

العامل الثاني يخصص للعمل B=13

العامل الثالث يخصص للعمل C=12

مجموع التكاليف 30

مثـال(3): اوجـد التخصـيص الـذي يحقـق الحـل الامثـل باسـتخدام الطريقـة الهنكاريـة (خوارزمية جونسون).

العمال \ الوظائف	A	B	C	D
1	28	26	25	30
2	20	24	32	26
3	27	18	22	20
4	19	21	20	23

الحل:

1- نطرح اصغر رقم في كل صف من قيم ذلك الصف فنحصل على مصفوفة التكاليف المعدلة.

العمال \ الوظائف	A	B	C	D	
1	28	26	25	30	$P_1=25$
2	20	24	32	26	$P_2=20$
3	27	18	22	20	$P_3=18$
4	19	21	20	23	$P_4=19$

الوظائف / العمال	A	B	C	D
1	3	1	0	5
2	0	4	12	6
3	9	0	4	2
4	0	2	1	4

2- نطرح اقل قيمة من كل عمود لايحتوي على اصفار فنحصل على مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية.

الوظائف / العمال	A	B	C	D
1	3	1	0	5
2	0	4	12	6
3	9	0	4	2
4	0	2	1	4
				$q_4=2$

الوظائف / العمال	A	B	C	D
1	3	1	0	3
2	0	4	12	4
3	9	0	4	0
4	0	2	1	2

3- نرسم الخطوط التي تغطي اكبر عدد ممكن من الاصفار، بما ان عدد الخطوط المستقيمة 3 وعدد الصفوف او الاعمدة 4 ، اذن يجب تطوير الحل وذلك بطرح اقل عنصر مثلاً (1) من جميع العناصر التي لم تمر بها الخطوط المستقيمة واضافته الى العناصر التي تقع عند تقاطع كل مستقيمين .

الوظائف / العمال	A	B	C	D
1	3	0	0	2
2	0	3	12	3
3	10	0	5	0
4	0	1	1	1

نكرر الخطوات السابقة

الوظائف / العمال	A	B	C	D
1	4	0	0	2
2	0	2	11	2
3	11	0	5	0
4	0	0	0	0

الوظائف / العمال	A	B	C	D
1	4	0	0	2
2	0	2	11	2
3	11	0	5	0
4	0	0	0	0

طالما امكن تغطية جميع الاصفار بعدد من المستقيمات مساوي لعدد الصفوف او الاعمدة فذلك يعني ان هناك حل امثل Optimal solution، ويمكن التخصيص كما موضح في الجدول الاتي :

العامل الاول يخصص للعمل C=25

العامل الثاني يخصص للعمل A=20

العامل الثالث يخصص للعمل B=18

العامل الرابع يخصص للعمل D=23

مجموع التكاليف 86