استخدام مقدر(Theil) اللامعلمي في تقدير معلمات أنموذج انحدار خطي بسيط في حالة العينات صغيرة الحجم

م.م. عمر عادل عبدالوهاب
جامعة ديالى/ كلية الإدارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء

المستخلص:

يرمي هذا البحث الى مقارنة مقدر (Theil) اللامعلمي مع مقدر (OLS) لتقدير معلمات أنموذج انحدار خطي بسيط β٠ و β١ ,أذ تعتبر المقدرات اللامعليمة أكثر مرونة من المقدرات المعلمية من في التعامل مع البيانات ذات التوزيع الحر او البينات ذات الاحجام التي تقل عن ٣٠ مشاهدة والتي لا تحقق شرط التوزيع. أذ تم استخدام البيانات المتمثلة بمعدلات دقات القلب (HR/Beats/min) وقيم استهلاك الاوكسجين (VO2/cal/kg/24hours) لثمانية اطفال رضع الذين يعانون من قصور القلب الاحتقاني المزمن, تم أستخدام (Matlab19) لتحليل البيانات,وتبين ان طريقة (Theil's Slope Estimator) هي افضل من طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) من خلال مقارنة متوسط مربعات الخطأ (MSE) للطريقتين .

Abstract:

This research aims to compare the non-parametric Theil's estimator with the OLS estimator for estimating the parameters of a simple linear regression model β_0 and β_1. The uneducated estimators are more flexible than the parameter estimators than in dealing with free distribution data or data with sizes less than 30 views. Do not fulfill the distribution condition. The data represented by heart rate (HR / Beats / min) and oxygen consumption values (VO2 / cal / kg / 24hours) were used for eight infants suffering from chronic congestive heart failure, and (Matlab19) was used to analyze the data, and it was found that the method (Theil's Slope Estimator) is better than the usual OLS by comparing the mean error squares (MSE) of the two methods.

Key words: - estimate parameter; Theil's estimator; simple linear regression

الكلمات الرئيسية :- تقدير المعلمات ؛ مقدر Theil ؛ الانحدار الخطي البسيط

١. المقدمة :

في السنوات الماضية كانت التوزيعات المعلمية موضوع نقاش الكثير من الباحثين, اذ تفترض الطرائق المعلمية ان العينة تأتي من مجتمع معين له عائلة معروفة من التوزيعات مثل العائلة الطبيعية(Gaussian) او عائلة كاما (Gamma) , ثم العمل على تقدير المعالم المجهولة لتلك العوائل بأستخدام طرائق(الإمكان الاعظم, العزوم, بيز , مربع كاي) , وغيرها من الطرائق ,او عمل اختبارات او اشتقاقات لحدود الثقة او منطقة الثقة للمعالم المجهولة بالعتماد على تلك العينة, لكن تلك الافتراضات المذكورة آنفاً غالباً ما تكون صارمة لان التوزيع المعلمي المفترض لا يكون بالضرورة التوزيع الفعلي للمسألة المراد حلها, فضلا عن ان اي تلوث بسيط للبيانات سوف ينتج استدلالات مظللة وغير صحيحة (Fan.J.;1993), فالطرق المعلمية تكون على الاغلب غير ملائمة للبيانات الصغيرة او التي ليس لها توزيع معلوم , في حين يمكن للطرائق اللامعلمية ان تسهم الى حد ما في الحصول على تقديرات جيدة ودقيقة في تقدير المعالم المجهولة , لذالك سنلجأ الى تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي البسيطة مرة بأحد الطرق المعلمية وهي طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) وتعد طريقة كلاسيكية لتقدير المعالم المجهولة β٠ و β١ وهي تهدف الى جعل مربعات الخطأ العشوائي اقل ما يمكن, حيث ان b1,b0 ماهي الا تقديرات للمعالم المجهولة β٠ و β١ على التوالي وأخرى بالطريقة اللامعلمية الا وهي طريقة (Theil's Slope Estimator) تستخدم هذه الطريقة في حالة كون البيانات لا تتبع التوزيع الطبيعي اي ان حجم البيانات قليل (Chu.Cand Cheng ..P.E ;1995), اذ ان هذه الطريقة تعطي نتائج ادق من طريقة المربعات الصغرى عند تقدير معالم نموذج الانحدار.

٢. مشكلة البحث :

في حالة العينات الصغيرة والتي تكون أقل من 30 مشاهدة ستظهر لنا مشكلة أن البيانات لا تتبع التوزيع الطبيعي او اي توزيع اخر, لذلك فأن استخدام الطرائق الكلاسيكية لا تعطي نتائج دقيقة.

٣. هدف البحث :

ويهدف البحث الى استعمال طريقة تقدير لا معلمي لتقدير معلمات أنموذج الانحدار β0 و β1 من اجل في حالة العينات الصغيرة.

٤. الجانب النظري :

(٤-١)الانحدار الخطي البسيط Simple Linear Regression

عندما نرغب في دراسة العلاقة بين المتغيرات نبدأ في تحديد اي المتغيرات التي تدخل في العلاقة ولتكن هذه العلاقة بسيطة اي بين اثنين من المتغيرات ففي هذه الحالة عادة ما نفكر بأحد المتغيرين بأنه المتغير السببي ويوصف بانه المتغير المستقل (x) والمتغير الاخر بانه متغير تابع له او متغير الاستجابة (Y)اي ان Yهو داله الى X

$$Y=F(x)$$

بعد ذلك نقوم بتحديد شكل العلاقة بين X و Y مثل هذه العلاقة من الصعوبة تحديدها بشكل دقيق ولكن يمكن الاعتماد على النظرية التي بوجبها تم اختيار المتغيرات المهمة في العلاقة للاستفادة منها في اقتراح شكل العلاقة أو اقتراح بعض الشروط الجانبية حول معاملات الانحدار, مثل هذه الفرضيات يمكن أن تساعد في تحديد عدة اشكال للعلاقة ثم بعد ذلك يمكن الاستفادة من التحليل الاحصائي للمساعدة في الاختيار بين هذه الصيغ. أن العلاقة الخطية التي تحتوي على متغيرين تسمى بالانحدار الخطي البسط simple linear regression والصيغة الرياضية التي تأخذها تلك العلاقة تسمى نموذج الانحدار الخطي البسيط simple linear regression model (اموري,١٥:١٩٨٨) .

(٤-٢) نموذج الانحدار الخطي البسيط Simple linear regression model هو

النموذج الخطي الذي يحتوي على متغير مستقل واحد X, ومتغير معتمد وهو Y ,اي ان Y هو دالة الى المتغير المستقل مع حد الخطأ (اموري,١٩٨٨:١٨)

$$Y=F(x ,u)$$

وهذا النموذج يمكن ان يأخذ الصيغة التالية

$$Yi=\beta0+\beta1\ Xi+ U\ i \qquad .....(1)$$

حيث ان :-

i: يمثل عدد المشاهدات .i=1,2,3,……,n

Yi : تمثل قيمة متغير الاستجابة Response Variable أو المتغير المعتمد Dependent Variable في المشاهدة (i).

Xi: تمثل قيمة المتغير المستقل Independent variable في المشاهدة (i) حيث يفترض ان Xi لا يرتبط بالخطأ U i وثابت من عينة اخرى. أو ان Xi هو المتغير الذي يسحب بشكل اختياري لغرض دراسة Yi .ويسمى بعض الاحيان المتغير السببي, وهو بصورة عامة ثابت معلوم يمثل قيمة المتغير المستقل في المشاهدة (i).

Ui: يمثل حد الخطأ Error Term في المشاهدة (i).

β0,β1: تمثل معالم النموذج المجهول Unknown Parameters

نستنتج من الصيغة (1) ان نموذج الانحدار الخطي البسيط يتصف بأنه:

١- نموذج بسيط وذلك لوجود متغير مستقل واحد في النموذج .

٢- نموذج خطي وذلك لظهور المعالم بشكل تركيب خطي Linear Combination أي ان علاقة Y مع المعالم تظهر على شكل تركيب خطي.

(٤-٣) طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method (L.S)

يعرف J M Stigler طريقة المربعات الصغرى بانها محرك التحليل الاحصائي الحديث, وذلك بالرغم من محدوديتها, وحوادثها الطارئة, وتغيراتها المتعددة, فانه مازال يعتمد على امتدادها وتوسيعاتها في التحليل الاحصائي ومقيمه عند الجميع. (تومي صالح,٣٣: ١٩٩٩) اما الكاتب والاستاذ J J Johnston فيعرفها على انها قانون او طريقة تقدير بعض المعالم غير المعروفة حيث ان المقدر هو القيمة لها والناتجة من تطبيق ذلك القانون او تلك الطريقة على مجموعة بيانات العينة المعنية بالدراسة. (تومي صالح,٣٣: ١٩٩٩).

ان اساس طريقة المربعات الصغرى يعتمد على حساب قيم المعالم المجهولة لنموذج الانحدار وهي β0 1 β, والتي تجعل مجموع مربعات الاخطاء العشوائية في نهايتها الصغرى .حيث ان قيم المعالم المحسوبة بهذه الطريقة تسمى تقديرات المربعات الصغرى Least Squares Estimators .فلو كانت هذه التقديرات هي b1,b0 الى β1,β0 على التوالي فان b1,b0 هي قيم تقديرية الى β0,β1 على التوالي والتي تجعل مجموع مربعات الاخطاء العشوائية للمجتمع في نهايتها الصغرى.

نفرض انه لدينا n من ازواج المشاهدات لكل من المتغير المعتمد والمتغير المستقل وكالاتي:

(Y1,X1),(Y2,X2)……..(Yn,Xn)

وفي حاله النموذج البسيط (SLM) المذكور انفا في الصيغة رقم (1) وبافتراض ان S يمثل مجموع مربعات الاخطاء العشوائية فان :

$$S = \sum_{i=1}^{n} U^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - E(Y_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i]^2 \dots\dots (2)$$

وسوف نختار تقديراتنا b0, b1 بحيث لو عوضنا قيمتها بدل β0, β1 على التوالي في المعادلة رقم(3) لحصلنا على اقل قيمة ممكنة الى S وباتباع اجراءات النهايات الصغرى يمكن حساب b0, b1 وذلك باستخدام اسلوب التفاضل الجزئي للمعادلة (2) بالنسبة الى كل من β_0, β_1 ثم نجعل هذه المشتقات الجزئية مساوية للصفر. وبحل المعادلات الانية الناتجة بالنسبة الى b1,b0 نحصل على قيم b1,b0 كما في الخطوات التالية :

$$\frac{\partial S}{\partial(\beta_0)} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial(\beta_1)} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)(X_i) \quad \dots\dots\dots (4)$$

وبجعل المعادلة (3) و (4) مساوية للصفر نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b_0 - b_1 X_i)(X_i) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (6)$$

والتي يمكن كتابتها على التوالي :

$$nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \dots\dots\dots\dots (7)$$

$$b_0\sum_{i=1}^{n} X_i + b_1\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i\, Y_i \quad \dots\dots\dots\dots (8)$$

حيث ان مجموعة المعادلات (7) و (8) تسمى المعادلات الطبيعية Normal Equations وبحل هذه المعادلات بالنسبة الى b1 ,b0 سوف نحصل على معادلات لإيجاد قيم b_0, b_1 التي هي قيم تقديرية لمعالم نموذج الانحدار الخطي البسيط (β_1 ,β_0) باستخدام طريقة المربعات الصغرى (OLS) وكالاتي:

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

$$b_1 = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}} \quad \dots\dots\dots\dots (10)$$

والمعادلة (10) يمكن كتابتها بصيغ حسابية مختلفة تلائم طبيعة تحليل البيانات المتاحة, منها:

$$b_1 = \frac{\sum X_i\, Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2} \quad \dots\dots\dots\dots (11)$$

$$b_1 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})\,(Y_i - \overline{Y})}{\sum(X_i - \overline{X})^2} \dots\dots\dots\dots (12)$$

فاذا فرضنا ان:

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

فان الصيغة (12) يمكن كتابتها

$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (13)$$

(عطية, عبدالقادر محمدعبدالقادر;٢٠٠٠)

(٤-٤)الانحدار اللامعلمي: Non- Parametric Regression

يكون هذا النموذج اقل تشدد من نموذج الانحدار المعلمي اذ ان الباحث يكون مهتما بإعطاء وصف عام للعلاقة وليس بدراسة تفاصيل العلاقة الدقيقة, وان نماذج الانحدار اللامعلمي هي الاضعف وصفا من نماذج الانحدار المعلمي, وهذا الامر تحديدا هو الذي جعل من نماذج الانحدار اللامعلمي اداة مرغوب فيها جداً لدى الباحثين لان البيانات الفعلية لا تمتلك دوماً مواصفات مثالية (النجار, ظافر حسين وحمود,٢٠٠١: ٢٦) , ويمكن اجمال خصائص الطريقة اللامعلمية بالآتي (Fan.J&Gijbels.I.;1996).

(٤-٥)خصائص التقدير اللامعلمي:

ان الطريقة اللامعلمية لتقدير منحني الانحدار لها اربع خصائص اساسية

١. يستفاد من هذه الطرق باستكشاف العلاقة العامة بين متغيرين
٢. لها القدرة على ان تعطي تنبؤات للمشاهدات الجديدة بدون الاشارة الى النموذج المعلمي الثابت
٣. تمتلك الطريقة اللامعلمية القدرة على ايجاد المشاهدات الزائفة من خلال دراسة النقاط المعزولة (البعيدة)
٤. تمثل طريقة مرنة لها القابلية على استبدال القيم المفقودة او القيم الموضحة من بين القيم المجاورة للنقطة X

ومن طرائق التقدير في الانحدار اللامعلمي هي طريقة (Theil's Slope Estimator)

(٤-٦) مقدر ميل ثيل Theil's Slope Estimator

تقترح هذه الطريقة الحصول على تقدير (B) على فرض ان نموذج الانحدار يكون كالآتي (Wayne W. Daniel, 741:2010)

$$Yi=\beta0+\beta1\ Xi+ U\ i \quad .....(14)$$

حيث ان:

Xi: المتغير المستقل

β0 و β1 : معالم مجهولة

Yi: المتغير العشوائي

ولايجاد (Theil's Estimator) بالنسبة ل β1 نطبق الصيغة التالية:

$$S_{ij} = (Yj - Yi)/(Xj - Xi) \quad \dots \dots \dots \ (15) \qquad j>i$$

وعليه فأن القيم الناتجة من الصيغة اعلاه يمكن ايجادها من خلال العلاقة التالية :

$$\dots \qquad (16) N = C_2^n$$

علما ان تقدير β1 سوف نرمز له بالرمز $\widehat{\beta1}$

بعد استخراج قيم (S_{ij}) نقوم بترتيبها تصاعديا حيث ان:

$$\widehat{\beta1} = Median\{S_{ij}\}$$

ومن ثم نجد $(\widehat{\beta0})_{1,m}$ حيث ان :

$$(\widehat{\beta0})_{1,m} = Y_i - \widehat{\beta1}\ Xi \qquad \dots \dots \ (17)$$

ثم نرتب القيم الناتجة تصاعدياً ونجد قيمة

$$(\check{\alpha})_{1,m} = Median\left\{(\widehat{\beta0})_{1,m}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (18)$$

5- الجانب التجريبي :

تم استعمال اسلوب المحاكاة (simulation) في توليد المتغيرات المستقله وفق التوزيع الطبيعي وفق الصيغة التالية :

$$X_i \sim N(0,0.5)$$

وان توليد الاخطاء العشوائية :

يتم توليد الاخطاء العشوائية وفق التوزيع الطبيعي القياسي وفق الصيغة التالية :

$$\varepsilon_i \sim N(0,1) \quad , \quad i = 1,2, \quad \dots \quad ,n$$

أذ تم توليد ٤ انواع من احجام العينات هي (٨،١٦،٣٠،٦٠) بتكرار التجربة ١٠٠ مرة حيث كانت النتائج كما يلي :

جدول رقم (١)

مقارنة نتائج المحاكاة لمعيار(MSE) بألأضافة الى قيم(R^2, β_0, β_1)

Parameter / Simple Size	B_1 (OLS)	B_1 (Theil)	B_0 (OLS)	B_0 (Theil)	R^2 (OLS)	R^2 (Theil)	MSE (OLS)	MSE (Theil)
8	4.098	4.201	-0.650	-0.726	0.670	0.707	1.100	٠.٦34
16	-0.055	3.841	-0.036	-0.426	0.556	0.569	0.866	0.851
32	3.404	3.405	-0.196	-0.188	0.487	0.٥69	1.056	1.052

من خلال جدول رقم (3) وعند حجم عينة يساوي (٨) كان تقدير الميل الحدي الاول في المربعات الصغرى $\beta_1(OLS)$ اقل مما هي عليه في طريقة ثيل $\beta_1(Theil's)$ اما تقدير الحد الثابت للمربعات الصغرى $\beta_0(OLS)$ فهو اكبر من تقدير الحد الثابت لطريقة ثيل β_0 (Theil's) , اما قيمة معامل التحديد R^2(OLS) لطريقة المربعات الصغرى فهو اقل من معامل التحديد لطريقة ثيل R^2(Theil's), وان متوسط مربعات خطا(MSE) طريقة ثيل Theil's هو اقل من متوسط مربعات خطأ(MSE) طريقة المربعات الصغرى(OLS) .

من خلال جدول رقم (١) وعندما يكون حجم العينة يساوي (16) , وان تقدير الميل الحدي الاول في المربعات الصغرى $\beta_1(OLS)$ اقل مما هي عليه في طريقة ثيل $\beta_1(Theil's)$ اما تقدير الحد الثابت

للمربعات الصغرى (OLS)β_0 فهو اكبر من تقدير الحد الثابت لطريقة (Theil's) β_0 , اما قيمة معامل التحديدR^2(OLS) لطريقة المربعات الصغرى فهو اقل من معامل التحديد لطريقة ثيلR^2 (Theil's) .متوسط مربعات خطا(MSE) طريقة ثيل Theil's هو اقل من متوسط مربعات خطأ(MSE) طريقة المربعات الصغرى(OLS).

من خلال جدول رقم (١) و عندما يكول حجم العينة يساوي (٣٢) , وان تقدير الميل الحدي الاول في المربعات الصغرى β_1(OLS) اقل مما هي عليه في طريقة ثيل β_1(Theil's) اما تقدير الميل الحدي الثابت للمربعات الصغرى (OLS)β_0 فهو اقل من تقدير الميل الحدي الثابت لطريقة (Theil's) β_0 , اما قيمة معامل التحديدR^2(OLS) لطريقة المربعات الصغرى فهو اكبر من معامل التحديد لطريقة ثيلR^2 (Theil's) .

٦- الجانب العملي :

فيما يلي معدلات دقات القلب(HR/Beats/min) وقيم استهلاك الاوكسجين (VO2/cal/kg/24hours) لثمانية اطفال رضع الذين يعانون من قصور القلب الاحتقاني المزمن (Wayne W. Daniel,2008:743)

جدول رقم (٢)

يمثل البيانات الحقيقة لمعدل دقات القلب وقيم استهلاك الاوكسجين

HR(X)	163	164	156	151	152	167	165	153
VO2(Y)	53.9	57.4	41	40	42	64.4	59.1	49.9

جدول رقم (3)

المقارنة بين متوسط مربعات الخطأ (**MSE**) **لنتائج البيانات الحقيقة** بألأضافة الى قيم($\boldsymbol{R^2, \beta_0, \beta_1}$)

B_1 (OLS)	B_1 (Theil)	B_0 (OLS)	B_0 (Theil)	R^2 (OLS)	R^2 (Theil)	MSE (OLS)	MSE (Theil)
٠.647	1.29٥	125.883	-154.73٨	0.838	0.878	16.121	13.817

من خلال جدول رقم (3) للبيانات الحقيقية **يتضح ان** متوسط مربعات خطا(MSE) لمقدر ثيل (Theil's estimator)هو اقل من متوسط مربعات خطأ(MSE) طريقة تقدير المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS), وان تقدير الميل الحدي الاول في المربعات الصغرى β_1(OLS) اقل مما هي عليه في طريقة ثيل β_1(Theil's) اما تقدير الحد الثابت للمربعات الصغرى (OLS)β_0 فهو اكبر من تقدير الحد الثابت لطريقة (Theil's) β_0, اما قيمة معامل التحديدR^2(OLS) لطريقة المربعات الصغرى فهو اقل من

معامل التحديد لطريقة ثيل R^2 (Theil) متوسط مربعات خطا(MSE) طريقة ثيل Theil's هو اقل من متوسط مربعات خطأ(MSE) طريقة المربعات الصغرى(OLS).

٧- الاستنتاجات :

- ان متوسط مربعات الخطأ (MSE) في طريقة (**Theil's Slope Estimator**) اقل من متوسط مربعات الخطأ في طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) وهذا يدل على ان طريقة ثيل في تقدير معلمات النموذج هي الافضل.

– من خلال متوسط مربعات الخطأ (MSE) وعند اخذ احجام عينات مختلفة تبين لنا ان الانحدار اللامعلمي باستخدام طريقة (**Theil's**) افضل من الانحدار المعلمي باستخدام طريقة المربعات الصغرى (OLS) في تقدير معلمات نموذج الانحدارالخطي البسيط β0 و β1 اي انها صمدت في حالة العينة الاكبر من ٣٠ مشاهدة .

– لا يقتصر استخدام طريقة ثيل على البيانات صغيرة الحجم ولكن يمكن ايضا تبيقها على البيانات ذات الحجم الكبير والتي تتوزع توزيعا حرا .

٨- التوصيات:

– استخدام مقدر ثيل (**Theil's Slope Estimator**) لتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط β0 و β1 في حالة البيانات صغيرة الحجم في حالة وجود متغير معتمد مع متغير توضيحي واحد فقط .

– محاولة ايجاد صيغة عاملة لهذه الطريقة بحيث يمكن ان تتعامل مع اكثر من متغير توضيحي واحد .

9- المصادر :

العربية:

١. اموري هادي كاظم, محمد مناجد عيفان الدليمي , مقدمة في تحليل الانحدار الخطي ,العراق ١٩٨٨,

٢. تومي صالح , مدخل لنظرية القياس الاقتصادي , الجزء الاول ديوان المطبوعات الجامعية , الجزائر , ١٩٩٩.

٣. عبد القادر محمد عبد القادر عطية,الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق,الدار الجامعية, الاسكندرية, مصر , الطبعة الثانية,٢٠٠٠.

٤. النجار, ظافر حسين وحمود , مناف يوسف ,(٢٠٠١) "**مقارنة مقدرات (Kernel) اللامعلمية لتقدير دوال الانحدار**" المجلة العراقية للعلوم الاحصائية , مجلد١ , العدد٢ , ص ٢٦

الانكليزية:

5-Fan.J.(1993)"Local linear regression smoother and their minimax efficiencies"Ann.stat.VOL.21-NO.1-pp.196-216.

6-Cheng .E .(1994)"nonparametric estimation of mean function with data missing at random "JASA.VOL.89.425.

7-Chu.Cand Cheng ..P.E (1995) "nonparametric regression estimation with missing data" J. stat. planning and inference .VOL 1.48 pp.85-99.

10-Fan.J&Gijbels.I.(1996) "Astudy of veriable bandwidth selection for local polynomial regression"statistca sinica-pp113-127.

8-Boman and Azzalini.A (1997) "Application smoothing techniques for data analysis" published in the united stat by oxford university press inc .new york.pp1-193.

9-Wayne W. Daniel, Biostatistics: A Foundation for Analysis in the Health Sciences (Wiley Series in Probability and Statistics)2008