تقريب المتوسط والتباين لمقدر العزوم لمعلمة الشكل لتوزيع بلريتو

م.م. بشرى سويدان ناصر
الجامعة التقنية الوسطى / المعهد الطبي التقني - المنصور

المستخلص:

توزيع باريتو يعبر عنه Par(α,k)، ويستعمل في الكثير من المجالات التطبيقية، في هذا البحث، بينا بعض خصائص التوزيع، فضلاً عن كيفية الحصول على مقدر معلمة الشكل لتوزيع باريتو باستعمال طريقة العزوم وبفرض ان معلمة القياس $\hat{k} = Y_1 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

بما ان المقدر لمعلمة الشكل α له نموذج معقد ومن الصعب الحصول على خصائصه لهذا السبب، نقوم بايجاد قيم تقريبية لكل من متوسط المجتمع The population mean و التباين variance لمقدر العزوم باستعمال متسلسلة تايلر الموسعة لمشتقة من الدرجة الثانية.

Keyword: Pareto distribution; shape parameter; moment estimator

Abstract:

Pareto distribution is Par(α,k) and used in different applied field in this research while some characteristics distribution and how to get the shape parameter in applying that the measure parameter $\hat{k} = Y_1 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

So the estimation of shape parameter a has a complicated sample and it is difficult to get its characteristics, so for this approximation to find the population mean and the variance by using Taylor series expansion of the second degree.

المقدمة :

توزيع باريتو من النوع الأول ذي المعلمتين والذي يعبر عنه Par(α,k) يستعمل كانموذج في العديد من التطبيقات العملية مثل توزيع احتياطي النفط العالمي في حقول النفط، احجام جزيئات الرمل، حرق اجزاء من الغابات على مستوى العالم، توزيع الدخل، الاحصاءات السكانية البشرية، تساقط الامطار وغيرها من المجالات. وقد اطلق علية اسم باريتو نسبة الى اسم استاذ الاقتصاد فليفريدو باريتو Vilfredo Pareto (1848-1923) وهو اول من اقترح هذا التوزيع عندما وضع قانون شامل للتعامل مع توزيع الدخل [١] لمجتمع معين، في هذا البحث يتم الحصول على تقدير معلمات توزيع باريتو باستعمال طريقة العزوم المقدرة وايجاد قيم تقريبية لكل من المتوسط والتباين لتوزيع باريتو.

تعريف:

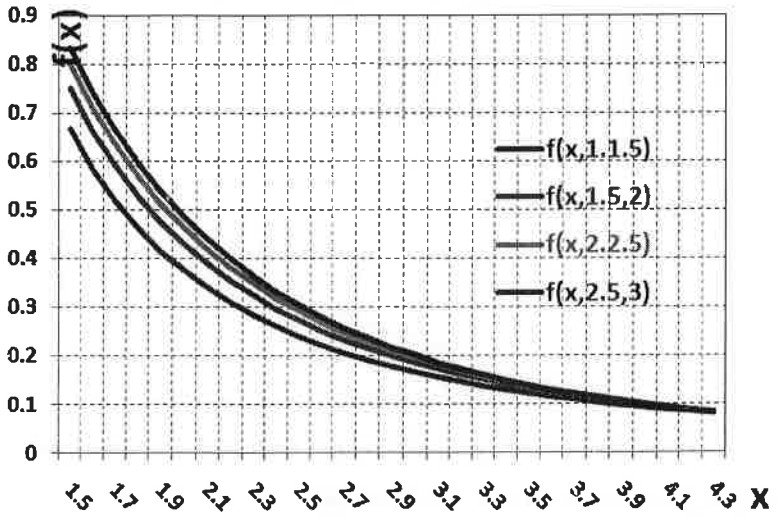
ليكن x متغير عشوائي، يقال ان المتغير X يتوزع توزيع باريتو ذو معلمتين $X \sim Par(\alpha,k)$ اذا كان X له دالة كثافة الاحتمالية (P.d.f) التالية:-

$$f(x;\alpha,k)=\begin{cases}\dfrac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & ,x\geq k \quad ,k>0,\alpha>0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث ان:

α: معلمة الشكل

K: معلمة القياس، في الشكل رقم (1) يمثل pdf's لتوزيع باريتو:



شكل رقم (1):pdf's لتوزيع باريتو

من المعروف ان توزيع باريتو وجد كنموذج لدراسة توزيع الدخل، ودالة كثافة الاحتمالية له هي:

$$F(x;\alpha,k)=\begin{cases}1-\left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha} & ,x\geq k \quad ,k>0,\ \alpha>0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

متوسط المجتمع The population mean: [٢]

$$E(x)=\frac{\alpha k}{\alpha-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

1-5-2 Variance of Pareto distribution:[2]

$$Var(x)=\frac{\alpha k^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \qquad \alpha>2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

طريقة العزوم (M.O.M): [3]

تعتمد طريقة العزوم على الدالة المولدة للعزوم حيث يمثل الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ (sample mean) العزم الاول، حيث يتم فرض مساواة عزم المجتمع مع عزم العينة ومن خلال معادلة (3) نحصل على:

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum x_i$$

$$E(x)=\bar{X}$$

$$\frac{\alpha\hat{k}}{\alpha-1}=\bar{X}$$

$$\hat{\alpha}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-\hat{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

وبفرض تقدير معلمة القياس بالقيمة المرتبة الأولى من البيانات $\hat{k}=x_{(1)}$

$$\hat{k}=Y_1=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

تصبح المعادلة (٥) تصبح المعادلة على النحو الآتي:

$$\hat{\alpha}_{MOM} = \frac{\overline{X}}{\overline{X} - Y_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

بعض النظريات الخاصة بتوزيع باريتو من النوع الاول:

نظرية (١): اذا كان المتغير X ~par(α,k) فان المتغير العشوائي Y=sX~Par(α,sk) حيث s ثابت. [٤]

$$Y = sX \Rightarrow X = y/s$$

$$dx/dy = \frac{1}{s} \Rightarrow |J| = \frac{1}{s}$$

$$g(y) = \alpha k^{\alpha} / (y/s)^{(\alpha+1)} \left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \alpha k^{\alpha} \left(s^{\alpha} / y^{(\alpha+1)}\right)$$

$$\Rightarrow g(y) = \begin{cases} \alpha (ks)^{\alpha} / y^{(\alpha+1)} & ks \le y < \infty \\ 0 & e.w \end{cases}$$

والذي يمثل p.d.f لتوزيع باريتو ذو المعلمتين α, sk.

نظرية (٢): لتكن $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ متغيرات عشوائية تتبع توزيع باريتو par(α,k) فان: [5]

١- اول احصاءة مرتبة $Y_1 = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim \text{par}(n\alpha, k)$

٢- التوزيع المحدد $Y_1 \text{Deg}(k)$

١- من خلال المعادلات (١)، (٢):

$$y_1 = \min\{x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n\}$$

$$P(y_1 \le y) = \begin{cases} 1 - P(y_1 > y) & , y < k \\ 0 & , y \ge k \end{cases}$$

$$\because P(x_i \le y) = 1 - P(x_i > y) \quad , i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$$

$$P(x_i \le y)=\int_c^y f(x_i,k,\alpha)\,dx=1-\left(\frac{k}{y}\right)^{\alpha}$$

$$p(Y_1 \ge y)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i \ge y)=\left(\frac{k}{y}\right)^{n\alpha}$$

$$P(Y_1 < y)=1-\left(\frac{k}{y}\right)^{n\alpha}$$

$$h(y)=\begin{cases}\dfrac{d}{dy}\left[1-\left(\dfrac{k}{y}\right)^{n\alpha}\right] & ,k \le y < \infty \\ 0 & e.w\end{cases}$$

$$h(y)=\begin{cases}\dfrac{n\alpha k^{n\alpha}}{Y^{n\alpha+1}} & ,k \le y < \infty \\ 0 & e.w\end{cases}$$

$$Y_1 \sim \text{par}(\text{n}\alpha,\text{k})$$

2- $\because Y_1 \sim \text{par}(\text{n}\alpha,\text{k}),$ *then c.d.f of* Y_1 *is*:

$$G(Y_1)=\begin{cases}0 & Y_1 \le k \\ 1-\left[\dfrac{k}{Y_1}\right]^{n\alpha} & k < Y_1 < \infty \\ 1 & Y_1 \to \infty\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} G(Y_1)=\begin{cases}0 & Y_1 \le k \\ 1 & Y_1 > k\end{cases}$$

This mean that the limiting distribution of Y_1 is Degenerate Distribution with Parameter k

The mean of random variable Y_1 is:

$$E(Y_1)=\frac{n\alpha k}{n\alpha-1} \quad \text{.....(8)}$$

and The variance of r.v Y_1 is:

$$Var(Y_1)=\frac{n\alpha k^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)} \quad \text{.....(9)}$$

نظرية (٣):[6] ليكن x متغير عشوائي بحيث $X \sim \text{par}(\alpha, k)$ فان المتغير العشوائي $y = \frac{1}{X} \sim Beta(1, \alpha)$

البرهان:-

If the r.v. $X \sim \text{par}(\alpha, k)$ then the r.v.. $y = \frac{1}{X} \sim Beta(1, \alpha)$

$$Y = \frac{1}{X} \Rightarrow X = \frac{1}{Y}$$

$$|J| = \left|\frac{dx}{dy}\right| = -\frac{1}{Y^2}$$

$$f(x, k, \alpha) = \alpha k^{\alpha} / x^{\alpha+1}$$

$$|J| = 1/y^2$$

$$g(y) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{(1/y)^{\alpha+1}}\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

$$g(y) = \alpha k^{\alpha} \frac{1}{\frac{1}{y^{\alpha+1}}} \times \frac{1}{y^2}$$

$$g(y) = \alpha k^{\alpha} y^{\alpha+1-2}$$

$$\therefore g(y) = \alpha k^{\alpha} y^{\alpha-1}$$

Let k=1 and $\alpha = b \Rightarrow g(y) = b y^{b-1}$

$g(y) = \frac{\Gamma(1+b)}{\Gamma(1)\Gamma(b)} y^{b-1}$ since $\Gamma(1+b) = b\Gamma(b)$ and $0 < y < 1$

نظرية (٤):- :[٥] ليكن x متغيراً عشوائياً بحيث $X \sim par(\alpha, k)$ فان المتغير العشوائي

$$y = Ln\left(\frac{X}{k}\right) \sim Exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

البرهان:-

We have: $f(x; \alpha, k) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{X^{\alpha+1}}$

$\because y = Ln\left(\frac{X}{k}\right)$

$$\frac{X}{k}=e^{y}$$

$$\therefore X=ke^{y}$$

$$|J|=\left|\frac{dX}{dy}\right|=ke^{y}$$

$$g(y)=\frac{\alpha k^{\alpha}}{\left(ke^{y}\right)^{\alpha+1}}\times ke^{y} \quad \Rightarrow g(y)=\frac{\alpha k^{\alpha}}{\left(ke^{y}\right)^{\alpha}}$$

$$g(y)=\alpha e^{-\alpha y}$$

$$y=Ln\left(\frac{x}{k}\right)\sim Exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

نظرية (٥): [٥] ليكن x متغيراً عشوائياً بحيث $X\sim \mathrm{Par}(\alpha,k)$ و k معلمة مجهولة فان:-

$$y=\ln X\sim \mathrm{Exp}(\theta,\lambda) \quad ;\theta=\ln k,\lambda=\frac{1}{\alpha}$$

البرهان:-

$$X=e^{y}$$

$$|J|=\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|=e^{y}$$

$$\because f(x,k,\alpha)=\frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \quad , x>k$$

$$g(y)=f(e^{y})\cdot|J|$$

$$=\frac{\alpha k^{\alpha}}{(e^{y})^{\alpha+1}}\cdot e^{y}$$

$$=\alpha k^{\alpha}\ e^{-\alpha y}$$

$$\because \theta=\ln k,\lambda=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow k=e^{\theta},\alpha=\frac{1}{\lambda}$$

$$g(y)=(\frac{1}{\lambda})(e^{\theta/\lambda})e^{-y/\lambda}$$

$$g(y)=\frac{1}{\lambda}e^{-(y-\theta)/\lambda}$$

$$g(y)=(\frac{1}{\lambda})\cdot e^{-(y-\theta)/\lambda} \qquad , y>0$$

then $y\sim \mathrm{Exp}(\theta,\lambda)$

نحصل على:-

$$E(y)=\lambda+\theta\Rightarrow \mu_Y = E(y)=\frac{1}{\alpha}+Lnk \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\delta_y^2 = Var(y)=\lambda^2 \Rightarrow \delta_y^2 = Var(y)=\frac{1}{\alpha^2} \quad \cdots\cdots(11)$$

استخدام متسلسلة تايلور الموسعة لتقريب المتوسط والتباين لطريقة العزوم المقدرة:-

طريقة العزوم المقدرة:-

لتكن $x_1,x_2,\ldots,x_n$ عينة عشوائية من الحجم n، سنقوم بتقريب المتوسط والتباين لمقدر العزوم باستخدام متسلسلة تايلر الموسعة للدالة g(X,Y) التي تحوي على متغيرين X,Y من الرتبة الثانية والمعطاة بالشكل الآتي: [٧]

$$E[g(X,Y)]=g(X,Y)+\frac{1}{2}Var[X]\frac{\partial^2}{\partial X^2}g(X,Y)\Big|_{\substack{\mu_X\\ \mu_Y}}+\frac{1}{2}Var[Y]\frac{\partial^2}{\partial Y^2}g(X,Y)\Big|_{\substack{\mu_X\\ \mu_Y}}$$
$$+Cov[X,Y]\left[\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y}g(X,Y)\Big|_{\substack{\mu_X\\ \mu_Y}}\right]\cdots\cdots(12)$$

$$Var[g(X,Y)]=Var[X]\left[\frac{\partial}{\partial X}g(X,Y)\Big|_{\substack{\mu_X\\ \mu_Y}}\right]^2+Var[Y]\left[\frac{\partial}{\partial Y}g(X,Y)\Big|_{\substack{\mu_X\\ \mu_Y}}\right]^2+$$
$$2Cov[X,Y]\left[\frac{\partial}{\partial X}g(X,Y)\Big|_{\substack{\mu_X\\ \mu_Y}}\right]\left[\frac{\partial}{\partial Y}g(X,Y)\Big|_{\substack{\mu_X\\ \mu_Y}}\right]\cdots\cdots(13)$$

By putting $X=\bar{X}$ and $Y=Y_1$ in eq.(١٢) and eq.(١٣), where $\bar{X}$ is the sample mean and Y_1 is the smallest order statistic, we get:

$$E[g(\bar{X},Y_1)]=g(\mu_{\bar{X}},\mu_{Y_1})+\frac{1}{2}Var[\bar{X}]\frac{\partial^2}{\partial\bar{X}^2}g(\bar{X},Y_1)\Big|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}+\frac{1}{2}Var[Y_1]\frac{\partial^2}{\partial Y_1^2}g(\bar{X},Y_1)\Big|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}$$
$$+Cov[\bar{X},Y_1]\left[\frac{\partial^2}{\partial\bar{X}\partial Y_1}g(\bar{X},Y_1)\Big|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

and

$$Var[g(\bar{X},Y_1)]=Var[\bar{X}]\left[\frac{\partial}{\partial\bar{X}}g(\bar{X},Y)\Big|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}\right]^2+Var[Y_1]\left[\frac{\partial}{\partial Y}g(\bar{X},Y_1)\Big|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}\right]^2+$$
$$2Cov[\bar{X},Y_1]\left[\frac{\partial}{\partial\bar{X}}g(\bar{X},Y_1)\Big|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}\right]\left[\frac{\partial}{\partial Y}g(\bar{X},Y_1)\Big|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}\right]\cdots\cdots\cdots(15)$$

From equations (3) and (4):

$$\mu_{\bar{X}}=\mu=\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

and

$$Var[\bar{X}]=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\alpha k^2}{n(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

Take equations (6) and (7):

$$\hat{\alpha}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-Y_1}\quad,\qquad \hat{k}=Y_1=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$$

Let $g(\bar{X},Y_1)=\hat{\alpha}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-Y_1}$

From eq. (١٦) and eq.(١٧) we get:

$$\mu_{\bar{X}}=\mu=\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}$$

and

$$Var[\bar{X}]=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\alpha k^2}{n(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

and from eq. (٨) and eq. (١٦)

$$g(\mu_{\bar{X}},\mu_{Y_1})=\frac{\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}}{\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}-\frac{n\alpha k}{(n\alpha-1)}}=\frac{n\alpha-1}{n-1},\quad\ldots\ldots(18)$$

On the other hand

$$\frac{\partial g(\bar{X},Y_1)}{\partial \bar{X}}=\frac{-Y_1}{(\bar{X}-Y_1)^2}$$

$$\left.\frac{\partial g(\bar{X},Y_1)}{\partial \bar{X}}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}=-\left[\frac{\frac{n\alpha k}{(n\alpha-1)}}{\left(\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}-\frac{n\alpha k}{(n\alpha-1)}\right)^2}\right]$$

$$\left.\frac{\partial g(\bar{X},Y_1)}{\partial \bar{X}}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}=-\frac{n(\alpha-1)^2(n\alpha-1)}{(n-1)^2\alpha k}\quad\ldots\ldots(19)$$

$$\left.\frac{\partial^2 g(\bar{X},Y_1)}{\partial \bar{X}^2}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}=\frac{2Y_1}{(\bar{X}-Y_1)^3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 g(\bar{X},Y_1)}{\partial \bar{X}^2}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}=\frac{\frac{2n\alpha k}{(n\alpha-1)}}{\left(\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}-\frac{n\alpha k}{(n\alpha-1)}\right)^3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 g(\bar{X},Y_1)}{\partial \bar{X}^2}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}=\frac{2n(\alpha-1)^3(n\alpha-1)^2}{(n-1)^3\alpha^2k^2}\quad\ldots\ldots(20)$$

$$\left.\frac{\partial g(\bar{X},Y_1)}{\partial Y_1}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}=\frac{\bar{X}}{(\bar{X}-Y_1)^2}$$

$$\left.\frac{\partial g(\bar{X},Y_1)}{\partial Y_1}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}=\frac{\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}}{\left(\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}-\frac{n\alpha k}{(n\alpha-1)}\right)^2}$$

$$\left.\frac{\partial g(\bar{X},Y_1)}{\partial Y_1}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}}=\frac{(\alpha-1)(n\alpha-1)^2}{(n-1)^2\alpha k}\quad\ldots\ldots(21)$$

$$\left.\frac{\partial^2 g(\bar{X},Y_1)}{\partial Y_1^{\,2}}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}} = \frac{2\bar{X}}{(\bar{X}-Y_1)^3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 g(\bar{X},Y_1)}{\partial Y_1^{\,2}}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}} = \frac{\frac{2\alpha k}{(\alpha-1)}}{\left(\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}-\frac{n\alpha k}{(n\alpha-1)}\right)^3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 g(\bar{X},Y_1)}{\partial Y_1^{\,2}}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}} = \frac{2(\alpha-1)^2(n\alpha-1)^3}{\alpha^2k^2(n-1)^3} \quad \ldots\ldots(22)$$

$$\frac{\partial^2 g(\bar{X},Y_1)}{\partial \bar{X}\partial Y_1} = -(\bar{X}-Y_1)^{-2}\left[\frac{\bar{X}+Y_1}{\bar{X}-Y_1}\right]$$

$$\left.\frac{\partial^2 g(\bar{X},Y_1)}{\partial \bar{X}\partial Y_1}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}} = -\left(\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}-\frac{n\alpha k}{(n\alpha-1)}\right)^{-2}\left[\frac{\left(\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}+\frac{n\alpha k}{(n\alpha-1)}\right)}{\left(\frac{\alpha k}{(\alpha-1)}-\frac{n\alpha k}{(n\alpha-1)}\right)}\right]$$

And then

$$\left.\frac{\partial^2 g(\bar{X},Y_1)}{\partial \bar{X}\partial Y_1}\right|_{\substack{\mu_{\bar{X}}\\ \mu_{Y_1}}} = -\frac{(\alpha-1)^2(n\alpha-1)^2(2n\alpha-1-n)}{\alpha^2k^2(n-1)^3} \quad \ldots\ldots(23)$$

$$E[\bar{X}Y_1] \cong \mu_{\bar{X}}k = \frac{\alpha k^2}{\alpha-1}, \quad \ldots\ldots(24)$$

$$Cov[\bar{X},Y_1] \cong E[\bar{X}Y_1] - E[\bar{X}]E[Y_1]$$

$$Cov[\bar{X},Y_1] \cong \frac{\alpha k^2}{\alpha-1} - \frac{\alpha k}{(\alpha-1)}\frac{n\alpha k}{(n\alpha-1)}$$

$$Cov[\bar{X},Y_1] \cong \frac{-\alpha k^2}{(\alpha-1)(n\alpha-1)} \quad \ldots\ldots(25)$$

by putting equations (١٧),(١٨),(٢٠),(٢٢),(9),(٢٣) and (٢٥) in (١٤), we can get the approximation to the expected value of $\hat{\alpha}$ which is given by:

$$E[\hat{\alpha}]=E\left[\frac{\bar{X}}{\bar{X}-Y_1}\right]$$

$$E[\hat{\alpha}]=\frac{n\alpha-1}{n-1}+\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha k^2}{n(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\right]\left[\frac{2n(\alpha-1)^3(n\alpha-1)^2}{(n-1)^3\alpha^2k^2}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{n\alpha k^2}{n(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}\right]\left[\frac{2(\alpha-1)^2(n\alpha-1)^3}{\alpha^2k^2(n-1)^3}\right]+$$
$$\left[\frac{-\alpha k^2}{(\alpha-1)(n\alpha-1)}\right]\left[-\frac{(\alpha-1)^2(n\alpha-1)^2(2n\alpha-1-n)}{\alpha^2k^2(n-1)^3}\right]$$

$$E[\hat{\alpha}]=\frac{n\alpha-1}{n-1}+\frac{(\alpha-1)(n\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-2)(n-1)^3}+\frac{(\alpha-1)^2(n\alpha-1)}{\alpha(n-1)^3(n\alpha-2)}$$

$$E[\hat{\alpha}]=\frac{n\alpha-1}{n-1}+\frac{(\alpha-1)(n\alpha-1)}{\alpha(n-1)^3}\left[\frac{(n\alpha-1)}{(\alpha-2)}+\frac{(\alpha-1)}{(n\alpha-2)}+(2n\alpha-1-n)\right]$$

$$E[\bar{\alpha}]=\frac{n\alpha-1}{n-1}\left[1+\frac{(\alpha-1)}{\alpha(n-1)^2}\left[\frac{n\alpha-1}{\alpha-2}+\frac{\alpha-1}{n\alpha-2}+2n\alpha-1-n\right]\right],\cdots\cdots(26)$$

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\alpha})=\alpha$$

That mean $\hat{\alpha}$ is asymptotically unbiased estimator of α. By putting equations (١٧),(١٩),(9),(٢١) and (25)in eq.(14), one can obtain the approximation to variance of $\hat{\alpha}$ which is given by:

$$Var[\hat{\alpha}]=Var\left[\frac{\overline{X}}{\overline{X}-Y_1}\right]$$

$$Var[\hat{\alpha}]=\left[\frac{\alpha k^2}{n(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\right]\left[-\frac{n(\alpha-1)^2(n\alpha-1)}{(n-1)^2\alpha k}\right]^2+\left[\frac{n\alpha k^2}{n(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}\right]\left[\frac{(\alpha-1)(n\alpha-1)^2}{(n-1)^2\alpha k}\right]^2$$
$$+2\left[\frac{-\alpha k^2}{(\alpha-1)(n\alpha-1)}\right]\left[\frac{(\alpha-1)(n\alpha-1)^2}{(n-1)^2\alpha k}\right]\left[-\frac{n(\alpha-1)^2(n\alpha-1)}{(n-1)^2\alpha k}\right]$$

$$Var[\hat{\alpha}]=\left[\frac{n(\alpha-1)^2(n\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-2)(n-1)^4}\right]+\left[\frac{(\alpha-1)^2(n\alpha-1)^2}{\alpha(n\alpha-2)(n-1)^4}\right]+2\left[\frac{n(\alpha-1)^2(n\alpha-1)^2}{\alpha(n-1)^4}\right]$$

$$Var[\hat{\alpha}]=\frac{(\alpha-1)^2(n\alpha-1)^2}{\alpha(n-1)^4}\left[\frac{n}{\alpha-2}+\frac{1}{n\alpha-2}+2n\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

Then let

$$g(\overline{X},Y_1)=\hat{k}=Y_1$$

Putting the eq.(٨) and (١٦) in the above eq. we get:

$$g(\mu_{\overline{X}},\mu_{Y_1})=\frac{n\alpha k}{n\alpha-1}=k\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$E[\hat{k}]=E[Y_1]=\frac{n\alpha k}{n\alpha-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{k})=\lim_{n\to\infty}\frac{n\alpha k}{n\alpha-1}=k$$

This shows that $\hat{k}$ is asymptotically unbiased estimator for k.

$$Var[\hat{k}]=Var[Y_1]=\frac{n\alpha k^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

الاستنتاجات:

١- يمكن توسيع استعمال هذه الطريقة بالتقريب باستخدام مقدر العزوم لايجاد التقريب لمعلمة الشكل لتوزيع باريتو المعمم وتوزيع باريتو الثنائي.

٢- المقدر لمعلمة الشكل α هو مقدر غير متحيز.

٣- بالامكان استعمال طرق التقدير الاخرى لتقدير معلمة الشكل لتوزيع باريتو مثل طريقة الامكان الاعظم، طريقة المتوسط، طريقة بايز، الامكان الاعظم المحورة، العزوم المحدثة وغيرها من طرق التقدير...

المصادر :

1- L. J. Norman, K. Samuel, and N. Balakrishnan,(1994), Continuous Univariate Distributions,Volume 1, second Edition, Wiley.

2- Mood A.M., Graybill F.A. and Boess D.C. (1974) " Introduction to the theory of statistics", Third Edition, McGraw-Hill, London.

3- Petersen J.L. (2009), Estimating the Parameters of a Pareto Distribution Introducing a Quantile Regression Method, p2--3.

4- Hogg, Robert V. and Klugman, Stuart A. (1984) Loss Distribution. John Wiley and Sons New York.

5- Nadarajah, S., and Kotz, S. (2003): Reliability for Pareto Models, Metro – International Journal of Statistic, VOL LXI, n.2. PP 191-204.

6- Lorenz M., "Methods of Measuring the Concentration of Wealth", Publications of the American Statistical Association, (1905), 9: 209–219.

7- Levy H. and Markowitz, H.M. (1979). "Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance", American Economic Review.